

# Aplicación de la Teoría de Credibilidad en Seguros de Riesgos del Trabajo

Yerling Ramírez Morera

---

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS.  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS.  
ÁREA DE CIENCIAS ACTUARIALES.

*Proyecto Final de Graduación para optar por la Licenciatura  
en Ciencias Actuariales.*

**“Aplicación de la Teoría de Credibilidad en el Seguro  
de Riesgos del Trabajo”.**

Proyecto elaborado por:

Yerling Ramírez Morera

A03425

Director:

MSc. Rodrigo Arias López

Julio, 2012

---

Proyecto final de graduación presentado el día 12 de julio del 2012 en la Biblioteca Carlos Monge de la Universidad de Costa Rica para optar por el grado de Licenciatura en Ciencias Actuariales, ante el siguiente tribunal

---

Dr. Javier Trejos Zelaya  
Presidente del Tribunal

---

Dr. Pedro Méndez Hernández  
Director de la Escuela de Matemática

---

M.Sc. Rodrigo Arias López  
Director del Proyecto

---

Dr. José A. Ramírez González  
Lector

---

M.Sc. Oscar Roldán Santamaría  
Lector

---

---

# DEDICATORIA

A Dios por darme la fortaleza, sabiduría y salud para realizar todos los proyectos que he tenido en mi vida.

A mi hijo, por su ayuda y comprensión en todo este proceso.

A mis padres por su apoyo incondicional en los retos de mi vida.



---

# AGRADECIMIENTO

A mi director de proyecto, Rodrigo Arias López, porque con su apoyo y guía hizo posible la culminación de este proceso, sus conocimientos y el deseo de compartirlos con sus estudiantes han sido un pilar en mi proceso de formación.

A todo el personal del Instituto Nacional de Seguros, que de una u otra manera me ayudaron a obtener la información necesaria para la realización de este trabajo.

A todo el personal de la Universidad de Costa Rica que de alguna manera formaron parte de este proceso y con su servicial apoyo me permitieron completar todo trámite necesario para la culminación de este trabajo.

A mis amigos y todos los ángeles que me acompañaron en este proceso, porque han sido un apoyo necesario para la finalización de este proyecto.

**Ficha Bibliográfica**

*Ramírez Morera, Yerling. Aplicación de la Teoría de Credibilidad en los Seguros de Riesgos del Trabajo. Proyecto de graduación para optar por el grado de Licenciatura en Ciencias Actuariales. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica. 2012. Págs xviii y 154.*

*Director: MSc. Rodrigo Arias López.*

*Palabras claves: Credibilidad, Teoría de Credibilidad, Bühlmann, Bühlmann-Straub, Hechemeister, Jewell, Credibilidad Parcial, Credibilidad Total, Seguro de Riesgos del Trabajo.*



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimiento</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xv</b>
<b>1. Descripción del Proyecto</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo General . . . . .	3
1.2. Objetivos Específicos . . . . .	3
<b>2. Marco Teórico.</b>	<b>5</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	5
2.2. Modelos de Credibilidad . . . . .	12
2.2.1. Credibilidad Total o Completa . . . . .	17
2.2.2. Credibilidad Parcial . . . . .	19

2.2.3. Credibilidad Exacta . . . . .	21
2.2.4. Credibilidad de distribución libre . . . . .	24
2.2.5. Modelos de Regresión . . . . .	58
2.2.6. Modelos Jerárquicos . . . . .	75
<b>3. Marco Metodológico</b>	<b>95</b>
3.1. Diseño de la investigación . . . . .	96
3.2. Unidad de análisis . . . . .	97
3.3. Limitaciones del proyecto . . . . .	98
3.4. Métodos de recolección de información . . . . .	98
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>101</b>
4.1. Planteamiento del Problema . . . . .	101
4.2. Aplicación de los modelos de Credibilidad . . . . .	104
4.2.1. Características de la cartera de estudio . . . . .	104
4.2.2. Implementación de los modelos . . . . .	104
<b>5. Conclusiones</b>	<b>127</b>

---

# ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Composición de cartera en Modelos de Credibilidad Clásica . . . . .	25
2.2. Composición de cartera - Modelo Jerárquico de Jewell. . . . .	78
4.1. Pesos naturales por riesgo y año de estudio. . . . .	105
4.2. Tarifas empíricas de la muestra. . . . .	106
4.3. Estimadores de Credibilidad. Modelo Bühlmann . . . . .	109
4.4. Estimadores de Credibilidad. Modelo Bühlmann-Straub. . . . .	112
4.5. Estimadores de Credibilidad. Modelo de Hachemeister. . . . .	118
4.6. Estimadores de Credibilidad. Modelo de Jewell - 3 Subcarteras. . . . .	123
4.7. Estimadores de Credibilidad. Modelo de Jewell - 3 Subcarteras. . . . .	124



---

# ÍNDICE DE FIGURAS

4.1. Tarifas Empíricas - Grupos 1-10. . . . .	115
4.2. Tarifas Empíricas - Grupos 11-20. . . . .	115
4.3. Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-1. .	117
4.4. Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-2. .	119
4.5. Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-3. .	119
4.6. Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-4. .	120



---

# Resumen

El objetivo de este proyecto es investigar los Modelos de Credibilidad y aplicarlos a las tarifas de riesgo de una muestra de Riesgos del Trabajo, a fin de determinar la tarifa que mejor se ajuste a la experiencia de cada riesgo considerado, sin dejar de lado la pertenencia a un colectivo común.

Si bien existen varias formas de clasificar a la Teoría de Credibilidad, en este trabajo se enfatiza en la rama denominada **Credibilidad Europea**, dentro de la cual explícitamente se detallan los modelos de Bühlmann, Bühlmann-Straub, Hachemeister y Jewell.

Los modelos de Bühlmann y Bühlmann-Straub se conocen como los modelos de distribución libre; se consideran el punto de partida de la Teoría de Credibilidad Moderna y el objetivo de ambos modelos es estimar la prima de riesgo individual, seleccionando para ello la mejor prima lineal y utilizando el criterio de mínimos cuadrados en esta selección.

La principal crítica que se le señala al modelo de Bühlmann es el supuesto de homogeneidad en el tiempo y entre pólizas, con lo cual se ignora la información que representa para el asegurado el impacto que tiene una póliza debido a su volumen y la tendencia del riesgo. Esto se trata de corregir con el Modelo de Bühlmann-Straub, al incorporar observaciones ponderadas.

Por su parte Jewell propone un modelo en el cual se pueda realizar el estudio de la cartera dividiendo la misma en subgrupos de riesgos homogéneos, donde cada póliza tiene asociados dos parámetros de riesgo, uno en el nivel de pólizas y otro en el nivel de las subcarteras. Como en el modelo de Bühlmann-Straub, las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, pero la varianza depende de los pesos asignados. Tampoco resuelve el problema de la tendencia de los parámetros.

Finalmente, el modelo de Hachemeister, quien planteó la necesidad de establecer estimaciones para las tendencias que presentaban los datos observados. Por lo cual propuso utilizar un estimador que fuera una ponderación entre el estimador individual para cada riesgo y el estimador para el conjunto de la cartera, utilizando para ello un modelo de regresión lineal, aunque el planteamiento se extiende a todo tipo de regresión.

Al aplicar los cuatro modelos antes descritos a la muestra de Riesgos del Trabajo se obtienen resultados interesantes. Los primeros tres modelos, aunque parecen realizar una estimación muy cercana a las tarifas empíricas, no consideran tendencia, por tanto no se seleccionan como mejor método de ajuste. Por su parte el modelo propuesto por Hachemeister es el que se determina como mejor estimador para algunas de las tarifas de Riesgos del Trabajo,



entre los modelos estudiados, precisamente por contemplar la tendencia natural de las observaciones. Aunque en el análisis se aclara que el modelo que parece ajustarse a la experiencia estadística debería ser uno que incluya no solo la tendencia sino también la jerarquización de la cartera. Sin embargo, esta posibilidad no se contempló como objeto de estudio en el presente proyecto.



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Descripción del Proyecto

La Teoría de Credibilidad permite el cálculo de primas de riesgo individuales, apegadas a un estudio tanto de la información propia de cada asegurado o póliza, como del colectivo al que pertenece (actividad de riesgo).

El objetivo es determinar el factor de credibilidad  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , tal que:

$$\pi = \lambda m + (1 - \lambda)M$$

donde:  $m$  es la media de riesgo individual,  $M$  es la media de riesgo colectiva y  $\pi$  es la prima de credibilidad del riesgo individual.

Fueron las grandes empresas con seguros de compensación laboral las que promovieron el desarrollo de la Teoría de Credibilidad, al solicitar a sus aseguradoras una prima ajustada, que cubriera el riesgo de la actividad específica, pero que incorporara la buena siniestralidad que la empresa propia había mantenido en el periodo utilizado para el cálculo de la prima cobrada.

Esta misma iniciativa es la que nos motiva para aplicar la Teoría de Credibilidad en Riesgos del Trabajo, pues aunque este seguro se caracteriza por ser solidario, al cubrir los pagos de reclamos con las primas recaudadas de todas las actividades de riesgo, podría mejorar el cálculo de la prima de riesgo de cada actividad cubierta en el seguro, incorporando en el mismo la buena o mala siniestralidad de cada grupo de riesgo, propiciando así un cálculo apegado a la técnica.

Por lo tanto, una vez explicados los alcances de los modelos investigados, se busca aplicarlos a una muestra de actividades o grupos de riesgo del Seguro de Riesgos del Trabajo, y determinar el modelo que ajusta de manera equilibrada la tarifa futura respecto a las existentes en cada actividad, considerando tanto la experiencia propia en cada uno como del colectivo al que pertenece, utilizando el criterio de **varianza mínima**.

Con este enfoque el nombre del presente proyecto es: ***Aplicación de la Teoría de Credibilidad en Seguros de Riesgos del Trabajo*** y los objetivos identificados en el desarrollo de la investigación son los siguientes:

## 1.1. Objetivo General

- Investigar y aplicar cuatro modelos de Credibilidad en la tarificación de Riesgos del Trabajo.

## 1.2. Objetivos Específicos

- Investigar en libros y revistas científicas los Modelos de Credibilidad.
- Profundizar en la investigación de los Modelos de Credibilidad de Bühlmann, Bühlmann-Straub, Hachemeister y Jewell.
- Determinar el modelo de Credibilidad que estima de manera mas justa las tarifas de la muestra.



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Marco Teórico.

### 2.1. Antecedentes del Proyecto

#### **Seguro de Riesgos del Trabajo**

El Seguro de Riesgos del Trabajo, con el que se busca dar protección a los trabajadores por aquellos accidentes o enfermedades derivadas del ejercicio de su trabajo, es en realidad una protección amparada en la Seguridad Social, como queda expresado por la Organización Internacional del Trabajo (OIT) en un comunicado del 2011:

*“Una sociedad que brinda seguridad a sus ciudadanos, no sólo los protege de la guerra y de la enfermedad, sino también de la inseguridad relacionada con el hecho de ganarse la vida a través del trabajo. Los sistemas de seguridad social prevén unos ingresos básicos en caso de desempleo, enfermedad y accidente laboral, vejez y jubilación, invalidez, responsabilidades familiares tales como el embarazo y el cuidado de los hijos y la pérdida del sostén de la familia. Estas prestaciones no sólo son importantes para los trabajadores y sus familias, sino también para sus comunidades en general. Al proporcionar asistencia médica, seguridad de los medios de vida y servicios sociales, la seguridad social ayuda a la mejora de la productividad y contribuye a la dignidad y a la plena realización de los individuos” [1].*

En términos generales, se puede decir que el Riesgo de Trabajo nació con la actividad laboral y se tienen pruebas documentales [1] de que desde tiempos antiguos ya se trataba el tema ya que con el trabajo los seres humanos satisfacen sus necesidades básicas, pero igualmente se exponen a accidentes y enfermedades derivadas de la actividad realizada.

Pese a varios intentos y pequeñas agupaciones que el ser humano intentó constituir en defensa de los derechos laborales, no es hasta el Siglo XVIII que en materia de Derecho Laboral se logran adoptar medidas enfocadas a proteger al trabajador de los riesgos derivados de las enfermedades laborales en los reglamentos de algunas empresas de profesionales. Sin embargo, la protección real y sistemática de los trabajadores no se inicia sino a mitad del Siglo XIX; con la creación de legislaciones sobre accidentes de trabajo [19].

Es precisamente en 1919 que se crea la OIT, con el claro objetivo de pro-



---

teger a nivel internacional a todos los trabajadores. Este organismo trabaja por la defensa de los derechos y las obligaciones en materia laboral, tanto de los patronos como de la clase trabajadora. Las convenciones dictadas por la Conferencia de la Organización Internacional del Trabajo han ejercido una mayor influencia a nivel mundial para tratar toda clase de discusiones laborales, pero especialmente han fortalecido y unificado el tema de accidentes y enfermedades, enfocándose en la prevención de los mismos, la higiene laboral y la seguridad social.

Más tarde, se empieza a crear normativa a nivel continental y regional mediante los organismos internacionales regionalizados y que dirigen de igual manera sus esfuerzos en materia laboral a crear normas de protección y regulación de los riesgos del trabajo; un ejemplo es en el caso latinoamericano, en donde se encuentra la Organización de Estados Americanos, que regula dentro de sus estatutos la necesaria protección a los derechos del trabajador [1].

En Costa Rica, como ocurrió en el mundo, la lucha por el reconocimiento de los Riesgos del Trabajo, se inició por medio de una agrupación de artesanos (1868), misma que se constituye con el objetivo de crear un medio de amparo para cubrir las secuelas de accidentes y enfermedades inherentes de esta clase trabajadora. Esta asociación trabajaba a través de una caja de ahorros, que era generada por medio del aporte económico de cada uno de los integrantes de la misma, y con ella se inicia el camino de la Seguridad Social en Costa Rica.

Pero no es hasta inicios del siglo XX, que en nuestro país se dan los primeros

intentos formales legislativos para generar una protección verdadera a la clase trabajadora, frente a los riesgos laborales a los que está expuesto todo trabajador.

Así en 1907 se presentó al Congreso un proyecto de Ley de Accidentes de Trabajo constituido por 16 artículos, no obstante la misma no prosperó hasta 1924, luego de la creación del Banco de Seguros (posteriormente llamado Instituto Nacional de Seguros), encargado de la administración de todo lo concerniente a la reparación de accidentes y la administración del régimen de riesgos de trabajo.

Así las cosas, amparado en la Ley N° 53 sobre Accidentes de Trabajo, el INS creó el Departamento Obrero, como encargado de administrar esta ley, el cual posteriormente se llamó Departamento de Riesgos del Trabajo.

Mucho después, en el año de 1943, se promulga el Código de Trabajo, y se incorpora dentro de él la Ley sobre Riesgos del Trabajo [22], que más tarde derogaría la ley 53 y pasaría a formar parte, como un título más, del actual Código de Trabajo.

La Asamblea Legislativa aprueba en el año 1982 la Ley 6727, que modifica el Título IV del Código de Trabajo, que integra lo siguiente:

- Se amplía el concepto de Riesgos del Trabajo (Artículo 195).
- El seguro de Riesgos del Trabajo se declara obligatorio, universal y forzoso (Artículo 201).
- Aparece el concepto de Salud Ocupacional, ligado a promover y man-

---

tener el más alto nivel de bienestar físico, mental y social del trabajador (Artículo 273).

- En consonancia con la Constitución Política de Costa Rica (Artículo 66), se asigna un conjunto de responsabilidades al patrono, respecto al seguro, al riesgo y la prevención (Artículos 214, 215 y 284).
- Al trabajador se le otorgan beneficios (Artículos 218 y 221) pero también obligaciones, según lo establecen los artículos 285 y 286 del citado Código.

Este seguro le permite al patrono protegerse de las consecuencias económicas por la eventual ocurrencia de accidentes y enfermedades laborales a que están expuestos los trabajadores en el desempeño de su trabajo, que están bajo su responsabilidad.

El precio del seguro contiene al menos tres elementos relevantes: es *equitativo*, pues se cobra de acuerdo al riesgo a que se expone el patrono; es *solidario*, pues con la contribución de todos se pagan los infortunios del trabajo que ocurran a los trabajadores; es *suficiente*, ya que se cobra a cada asegurado el monto que, al ser agregado a las sumas pagadas por los demás, permite financiar los costos de los accidentes [12].

Por otra parte, para los asegurados, este seguro garantiza asistencia médico-quirúrgica, hospitalaria, farmacéutica y de rehabilitación. También se conceden beneficios por muerte y por incapacidad temporal y permanente.

El modelo de tarifación actual tiene como objeto la obtención de tarifas

equitativas para cada grupo de riesgo, mediante la utilización de datos estadísticos consolidados de los grupos de clases homogéneas (50 grupos de riesgo) [14].

Además el modelo actual de tarificación está fundamentado en un sistema de reparto de capitales de cobertura, el cual consiste en fijar un equilibrio anual entre el valor actual de las prestaciones generadas por accidentes ocurridos en el año y las primas del mismo año [24].

Considerando que históricamente los patronos, quienes por ley tienen la responsabilidad de velar por el bienestar y seguridad de sus empleados, apelaron a que la prima que debían pagar incorporara en su cálculo la buena siniestralidad que con esfuerzo y prevención habían logrado, este es precisamente el motivo de aplicar la Teoría de Credibilidad al seguro de Riesgos del Trabajo, pues con estos métodos será posible determinar primas ajustadas para cada riesgo.

Para esto se ha tomado una muestra de 20 grupos de riesgo entre los 50 grupos utilizados por la aseguradora para atender la demanda del mercado. Estos datos fueron transformados con factores constantes, a fin de no revelar información declarada confidencial conforme al artículo 12 de la Ley N°12.

Esto significa que las tarifas de riesgo sin credibilidad no corresponden a las reales del seguro; sin embargo, el análisis con las tarifas de credibilidad tiene validez.

La tendencia actual en la tarificación de seguros le da cada vez mayor importancia a las características particulares de cada riesgo, por lo que resulta

---

imperativo aplicar las técnicas que permitan agregar la experiencia siniestral de los riesgos individuales, con el objetivo de adecuar las primas a las características particulares de cada riesgo, que a priori no son conocidas, y que se intentan estimar mediante métodos bayesianos, incorporando la información resultante del histórico particular de cada riesgo.

En un seguro que se expone en la competencia, la fijación de las primas se convierte en una tarea primordial para toda aseguradora. Cuanto mayor conocimiento se tenga sobre el riesgo a cubrir, más exacto será el cálculo de la prima del seguro, que a su vez le permitirá a la aseguradora ofrecer primas competitivas sin incrementar el riesgo de insuficiencia, lo cual concluirá finalmente en una cartera equilibrada con clientes satisfechos.

## 2.2. Modelos de Credibilidad

El término *Credibilidad* se introdujo por primera vez en seguros en Estados Unidos a principios del Siglo XX, antes de la primera Guerra Mundial, en relación con los sistemas de ajuste de primas en seguros de compensación obrera o seguro de accidentes, motivado por la presión que algunas empresas, con numerosos empleados y baja siniestralidad, ejercieron sobre las compañías aseguradoras, para que les reconocieran la baja siniestralidad presentada y la elevada tasa de actividad en los importes de las primas a pagar [6].

Una definición formal de Teoría de Credibilidad no se encuentra propiamente dada por los expertos en el tema, sin embargo podemos enunciar algunas de las definiciones más utilizadas en este campo:

**Definición 2.1.** *“La Teoría de Credibilidad es una colección de ideas concernientes al ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene la experiencia de reclamos” [10].*

Por otro lado, Norberg [17] la define como:

**Definición 2.2.** *“La Teoría de Credibilidad investiga ciertos principios y métodos para ajustar las primas a medida que la experiencia de los reclamos es obtenida”.*

Entonces podemos decir que la *Teoría de Credibilidad* es un compendio de métodos matemáticos-actuariales que permiten al asegurador ajustar de modo sistemático las primas de los seguros en función de la experiencia de siniestralidad.

Bajo este análisis destacan dos conceptos clásicos: el de *riesgo individual* (pólizas) y *riesgo colectivo* (cartera de seguros), y se resuelve de modo riguroso el problema de cómo analizar la información obtenida de estas dos fuentes para llegar a la prima de seguros y obtener una tarifa justa.

Para ello se agrupan las pólizas referentes a un mismo riesgo con una serie de características comunes del colectivo, al cual le corresponde como tal una prima colectiva. Pero además, se consideran las características propias de cada póliza, que a su vez la diferencia de las demás; estas características individuales son de difícil cuantificación, pero no se pueden descartar al momento de calcular las primas de riesgo individuales.

Para Whitney [26], el problema fundamental consiste en la obtención de un criterio que permitiera dar, a cada uno de los dos tipos de experiencia, su peso adecuado en la determinación de la prima a pagar por cada asegurado. Para ello propone que la prima de riesgo se calcule con la siguiente combinación lineal convexa.

**Definición 2.3.** *La tarifa de credibilidad  $P$  para la póliza se define como:*

$$P = Z \cdot X + (1 - Z) \cdot C \quad (2.1)$$

donde:

$X$  : experiencia individual (tarifa de la póliza).

$C$  : información que se dispone sobre el colectivo (tarifa colectiva).

$Z$  : factor de ponderación denominado **factor de credibilidad**, y mide la confianza o la importancia que se da a la experiencia individual en el cálculo de la prima a pagar,  $0 \leq Z \leq 1$ .

Es decir, la prima descrita ( $P$ ), no es más que una media ponderada entre los valores extremos  $X$  y  $C$  e intuitivamente el factor de credibilidad  $Z$  debería satisfacer lo siguiente:

- Ser una función del tiempo de vigencia de la póliza,  $n$ , por tanto  $Z \equiv Z(n)$ .
- Ser una función creciente en  $n$ , de modo que se aproxime a 1 cuando  $n$  tienda a infinito, mientras que tienda a cero cuando  $n$  tienda a cero. De esta manera, el valor de  $n = 0$  representaría que no se dispone de experiencia para el asegurado (es decir se hablaría de un contrato nuevo), y la prima a cobrar en este caso sería  $C$ , lo mismo que la prima basada en la información del colectivo. En la medida en que aumenta  $n$ , y por tanto se dispone de más datos, la información individual tiene mayor peso. Es decir la experiencia de siniestralidad del asegurado o de la póliza tendría más creencia, sería más creíble. El caso extremo,  $n$  tendiendo a infinito, debería proporcionar como  $X$  el valor de la prima, esto es que la prima estuviera basada exclusivamente en la experiencia individual, dado que hay abundante información.
- El factor de credibilidad  $Z$  debería presentar un comportamiento inverso respecto al valor esperado de la varianza teórica,  $S^2 = E[Var(X)]$ , de modo que cuanto mayor sea la varianza del individuo menor peso se



da a su experiencia individual y mayor a la del colectivo. Esto es lógico, puesto que si la cartera no es heterogénea, entonces la prima basada en el colectivo sería el mejor estimador de la prima individual. Por otro lado, mayor heterogeneidad de la cartera debería dar lugar a un mayor peso a la información del asegurado o póliza.

Si bien las contribuciones que ha tenido la Teoría de Credibilidad han sido claras y extensas, los diferentes autores que se han involucrado en su estudio, han partido de diferentes puntos de vista para su desarrollo, esto ha sido un obstáculo en el intento de clasificar teóricamente dicha teoría.

Por ejemplo, Hickman [10] clasifica los aportes a la Teoría de Credibilidad con base en la consideración de los parámetros del proceso de reclamos en los modelos. Así este autor denominó *Teoría de Credibilidad Clásica* cuando dichos parámetros son considerados como constantes (no estocásticos) que deben ser estimadas usando únicamente los datos propios del seguro. Por otro parte, clasifica como *Teoría de Credibilidad Bayesiana o Moderna* aquellos modelos cuyos parámetros en el proceso de reclamos son considerados como variables aleatorias generadas por un proceso estocástico que no puede ser completamente conocido.

Como Hickman, existen clasificaciones hechas por otros autores como Longley & Cook [15], Taylor [21], entre otros. Para el desarrollo de nuestros modelos, utilizaremos la clasificación propuesta por Norberg [18], quien indica que la Teoría de Credibilidad se divide en dos ramas conocidas como *Teoría de Credibilidad de las Fluctuaciones Limitadas* y *Teoría de Credibilidad de la Máxima Precisión*, aunque otros autores

las denominan: *Teoría de Credibilidad Americana* y *Teoría de Credibilidad Europea*, respectivamente [18].

La utilización de estos últimos términos para clasificar los modelos de credibilidad no es compartida por muchos autores, pues ambos enfoques fueron propuestos por americanos, sin embargo la segunda fue más desarrollada por actuarios suizos.

En estas dos ramas de clasificación de la Teoría de Credibilidad se encuentran las contribuciones iniciales de la misma, así como las que se detallan en este trabajo, como se observa a continuación.

- **Teoría de Credibilidad Americana:**

- *Credibilidad Total.*
- *Credibilidad Parcial.*

- **Teoría de Credibilidad Europea:**

- *Credibilidad Exacta.*
- *Credibilidad de Distribución Libre.*

Como se puede observar, a lo largo del tiempo se ha venido desarrollando modelos que buscan optimizar la prima pura de un seguro. En las siguientes secciones se trata de explicar de la forma más detallada posible cada uno de los modelos indicados en la clasificación expuesta.

### 2.2.1. Credibilidad Total o Completa

Suponga que  $S$  representa el riesgo para una aseguradora correspondiente a una póliza o conjunto de ellas con ciertas características particulares, y por un periodo dado. Sean  $S_1, \dots, S_m$  los montos de los reclamos pagados a esta póliza durante  $m$  periodos consecutivos, y sea  $\bar{S} = (S_1 + S_2 + \dots + S_m)/m$  el promedio de estos reclamos. Para el ejemplo que se desea explicar, interesa estudiar el comportamiento de  $\bar{S}$  a lo largo del tiempo para un conjunto de pólizas en particular, pues se desea determinar si la prima que se cobra a cada uno de ellas es la adecuada. Si las variables  $S_1, \dots, S_m$  son independientes, idénticamente distribuidas y con esperanza finita, entonces la ley de los grandes números garantiza que la media muestral  $\bar{S}$  converge a la constante desconocida  $E[S]$ , conforme el número de términos crece a infinito.

Ante este planteamiento surge la incógnita ¿qué tan grande debe ser  $m$  para que  $\bar{S}$  esté razonablemente cercano a  $E[S]$ ? Como una respuesta viable Mowbray [16] propone el siguiente criterio.

**Definición 2.4.** Sea  $S$  una variable aleatoria Sean  $k \in (0, 1)$  y  $p \in (0, 1)$  dos números fijos. Se dice que  $\bar{S}$  tiene **credibilidad completa**  $(k, p)$  si

$$P(|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]) \geq p.$$

Es decir, se supone que la prima pura estimada es estable si existe una probabilidad alta ( $p$ ) de que la diferencia entre la prima verdadera y la estimada no es más que un límite pequeño elegido ( $k$ ), en la práctica, generalmente se toma  $k = 0,05$  y  $p = 0,9$  [16].

Asumiendo normalidad sobre  $\bar{S}$  se tiene:  $E[\bar{S}] = E[S]$  y  $Var(\bar{S}) = \frac{Var(S)}{m}$ ; además por el teorema del límite central, se obtiene de la Definición 2.4

$$\begin{aligned}
 P(|\bar{S} - E[S]| \leq kE[S]) &= P\left(\frac{|\bar{S} - E[S]|}{\sqrt{Var(S)/m}} \leq \frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right) \\
 &= P\left(-\frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}} \leq Z \leq \frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right) - \Phi\left(-\frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{kE[S]}{\sqrt{Var(S)/m}}\right)\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{k\sqrt{m}E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) - 1 \geq p.
 \end{aligned}$$

Según la definición 2.4, esta probabilidad debe ser mayor o igual a  $p$ , obteniendo:

$$\Phi\left(\frac{k\sqrt{m}E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \geq \frac{1+p}{2} = \Phi(u_{\frac{1+p}{2}}).$$

El objetivo es, dado  $p$  y  $k$ , encontrar el valor de  $m$  más pequeño que cumpla con la desigualdad anterior. Para ello se considera que se obtiene la igualdad de esta ecuación. Sea  $u_q$  el  $q$ -cuantil de la distribución normal, es decir,  $\Phi(u_q) = q$ . Entonces

$$\frac{k\sqrt{m}E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \geq u_{(1+p)/2}.$$

Despejando  $m$  se obtiene:

$$m \geq \frac{u_{(1+p)/2}^2 \text{Var}(S)}{k^2 E^2[S]} \quad (2.2)$$

$$= 1082 \frac{\text{Var}(S)}{E^2[S]}, \quad (2.3)$$

en donde la última expresión es aproximada y se han usado los valores  $k = 0,05$  y  $p = 0,9$ , y por lo tanto  $u_{(1+p)/2} = u_{0,95} = 1,6449$ . Los términos  $E[S]$  y  $\text{Var}[S]$  pueden ahora ser estimados a través de la media y varianza muestral, respectivamente, usando la información que se tenga a disposición al momento de hacer el análisis. Substituyendo estos valores en la fórmula se puede conocer una aproximación del número de periodos  $m$  del historial para que  $\bar{S}$  tenga credibilidad completa en  $(0,05, 0,9)$

Observe que cuando  $p$  crece, entonces el número de periodos de observación  $m$  también crece. Por otro lado, si el parámetro  $k$  crece, es decir, si se pide que la distancia entre  $\bar{S}$  y  $E[S]$  tenga mayor amplitud, entonces  $m$  decrece. Finalmente se observa que la condición aproximada para la credibilidad completa obtenida mediante la ecuación 2.2, que a su vez se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{Var}(\bar{S}) \leq \frac{k^2 E^2[S]}{u_{(1+p)/2}^2}.$$

### 2.2.2. Credibilidad Parcial

En lugar del estimador  $\bar{S}$  para  $E[S]$ , Whitney [25] propone la combinación lineal convexa

$$\hat{S} = Z\bar{S} + (1 - Z)E[S]$$

en donde  $Z \in (0, 1)$  es llamado factor de credibilidad. Mediante una expresión como la propuesta se le otorga credibilidad parcial a la media muestral  $\bar{S}$ , y la credibilidad complementaria se le otorga a la media teórica  $E[S]$ . El problema es determinar el valor de  $Z$ . Se pretende que el estimador,  $\hat{S}$  no diste demasiado de  $E[S]$ . La condición de la definición 2.4 se reduce a

$$P(|Z(\bar{S} - E[S])| \leq kE[S]) \geq p.$$

Observe que esta expresión hace referencia únicamente al primer sumando del estimador propuesto. Reescribimos la expresión anterior de la siguiente forma:

$$P\left(|(\bar{S} - E[S])| \leq \frac{kE[S]}{Z}\right) \geq p.$$

Esta es la misma condición para la credibilidad completa solo que en lugar del parámetro  $k$  se tiene ahora  $k/Z$ , es decir, la credibilidad completa  $(k, p)$  para  $Z\bar{S} + (1 - Z)E[S]$  es equivalente a la credibilidad completa  $(k/Z, p)$  para  $\bar{S}$ .

Nuevamente bajo la hipótesis de normalidad para  $\bar{S}$  y con los valores de  $k$  y  $p$  mencionados anteriormente se tiene la aproximación

$$m \geq \frac{Z^2 u_{(1+p)/2}^2 \text{Var}(S)}{k^2 E^2[S]} = (1082) Z^2 \frac{\text{Var}(S)}{E^2[S]}. \quad (2.4)$$

De donde se obtiene

$$Z = \frac{kE[S]\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2}\sqrt{\text{Var}(S)}} = \frac{\sqrt{m}}{32,89} \frac{E[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}. \quad (2.5)$$

Este valor de  $Z$  excede el valor de uno para valores suficientemente grandes de  $m$ , por lo tanto se define el factor de credibilidad como

$$Z = \min \left\{ \frac{kE[S]\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2}\sqrt{Var(S)}}, 1 \right\}. \quad (2.6)$$

### 2.2.3. Credibilidad Exacta

También conocida como **Credibilidad Bayesiana** y corresponde a otra forma de incorporar el historial de reclamos de un grupo de asegurados en el cálculo de las primas.

Desde esta perspectiva se considera que  $\theta$  es una variable aleatoria para la cual se asume una distribución de probabilidad  $h(\theta)$  llamada distribución a priori. Esta distribución refleja cierta información subjetiva o cuantitativa que el observador pueda tener sobre el parámetro  $\theta$ . La distribución conjunta ( $f$ ) de una muestra aleatoria  $x_1, \dots, x_m$  y el parámetro  $\theta$  (bajo la hipótesis de independencia) es:

$$f(x_1, \dots, x_m, \theta) = f(x_1, \dots, x_m | \theta)h(\theta) = \prod_{i=1}^m f(x_i | \theta)h(\theta).$$

La distribución marginal de la muestra es entonces:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \int_{\theta} \prod_{i=1}^m f(x_i | \theta)h(\theta)d\theta.$$

con  $f(x_i|\theta)$  una distribución de probabilidad dada, de donde se busca estimar el parámetro.

Conociendo estas funciones puede ahora calcularse la distribución condicional de  $\theta$  dada la muestra  $(x_1, \dots, x_m)$  como sigue:

$$\begin{aligned} g(\theta|x_1, \dots, x_m) &= \frac{f(x_1, \dots, x_m, |\theta)h(\theta)}{f(x_1, \dots, x_m)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m f(x_i|\theta)h(\theta)}{\int_{\theta} \prod_{i=1}^m f(x_i|\theta)h(\theta)d\theta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De esta forma la distribución  $h(\theta)$  representa cierta información que el observador conoce del parámetro  $\theta$  antes de tomar la muestra, y la distribución *a posteriori*  $g(\theta|x_1, \dots, x_m)$  es la distribución modificada a la luz de la muestra aleatoria. Teniendo ahora esta distribución *a posteriori* para  $\theta$ , se pueden proponer varias formas de estimar este parámetro, una de ellas es simplemente tomar la esperanza de esta distribución, es decir, un estimador Bayesiano para  $\theta$  es

$$\hat{\theta} = E(\theta|x_1, \dots, x_m) = \int \theta g(\theta|x_1, \dots, x_m)d\theta.$$

Para una mejor comprensión se expone el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

Suponga que  $x_1, \dots, x_m$  es una muestra aleatoria de la distribución *Bernoulli*( $p$ ), y suponga además que el parámetro  $p$  tiene una distribución



$Beta(a, b)$ , con  $a$  y  $b$  conocidos. Como el soporte de la distribución  $Beta$  es el intervalo  $[0, 1]$ , tal distribución es factible para el parámetro  $p$ . La densidad conjunta de la muestra y el parámetro es

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m, p) &= f(x_1, \dots, x_m | p) h(p) \\ &= p^{m\bar{x}} (1-p)^{m-m\bar{x}} \frac{1}{B(a, b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \\ &= \frac{1}{B(a, b)} p^{a+m\bar{x}-1} (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1}. \end{aligned}$$

Integrando respecto a  $p$  se obtiene la densidad marginal de la muestra,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 p^{a+m\bar{x}-1} (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1} dp \\ &= \frac{B(a+m\bar{x}, m-m\bar{x}+b)}{B(a, b)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad a posteriori para  $p$  es

$$g(p | x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{B(a+m\bar{x}, m-m\bar{x}+b)} p^{a+m\bar{x}-1} (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1}.$$

Esta es la densidad  $Beta(a+m\bar{x}, m-m\bar{x}+b)$ , y su esperanza puede usarse como un estimador Bayesiano para  $p$ , es decir,

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{a + m\bar{x}}{m + a + b} \\ &= \frac{m}{m + a + b}\bar{x} + \left(1 - \frac{m}{m + a + b}\right) \frac{a}{a + b}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

#### 2.2.4. Credibilidad de distribución libre

Los modelos de credibilidad denominados de distribución libre, se conocen así por cuanto no es necesario hacer ninguna hipótesis ni sobre la función de distribución que explica los riesgos individuales, ni sobre la distribución a priori de los parámetros de riesgo.

Por lo que clasificaremos en este grupo los conocidos modelos clásicos de credibilidad, a saber, el **Modelo de Bühlmann** y el **Modelo de Bühlmann-Straub**, los cuales se consideran como el punto de partida de la Teoría de Credibilidad Moderna.

El objetivo de ambos modelos es estimar la prima de riesgo individual, es decir, correspondiente a un asegurado o grupo de asegurados que conforman una póliza en una cartera de seguros, seleccionando para ello la mejor prima lineal y utilizando el método de mínimos cuadrados.

Para una mejor descripción se considerará la cartera de seguros que aparece en el *Cuadro 2.1*, en la cual se observan los siguientes elementos:

1.  $X_{ji}$ : variable aleatoria que representa el riesgo del asegurado o póliza  $j$  en el año  $i$ , puede ser la cantidad reclamada, el número de reclama-

ciones, tarifa experimental, etc.

2. La tabla describe la evolución de  $k$  asegurados o contratos de seguro (pólizas) con características comunes durante  $n$  años.
3. Las columnas representan los riesgos.
4. Las filas representan el tiempo, en años u otra unidad de medida.
5. La función de distribución de las  $X_{ji}$  depende de un parámetro desconocido  $\phi_{ij}$ , denominado *parámetro de riesgo*.

Cuadro 2.1: Composición de cartera en Modelos de Credibilidad Clásica

Años	Grupos de riesgo			
	$j = 1$	$j = 2$	$\cdots$	$j = k$
	$\phi_1$	$\phi_2$	$\cdots$	$\phi_k$
1	$X_{11}$	$X_{21}$	$\cdots$	$X_{k1}$
2	$X_{12}$	$X_{22}$	$\cdots$	$X_{k2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n$	$X_{1n}$	$X_{2n}$	$\cdots$	$X_{kn}$

Se asumen las siguientes hipótesis [13]:

1. Homogeneidad en el tiempo, esto es  $\phi_{ij} = \phi_j$ . Es decir, todas las variables aleatorias pertenecientes a la misma columna tienen la misma distribución de probabilidad.
2. Los parámetros  $\phi_j$  son variables aleatorias independientes y con la misma distribución  $\pi(\phi)$ .

3. Independencia de riesgos. Es decir, las columnas son independientes entre sí.
4. Dado el valor de  $\phi_j$  las variables aleatorias dentro de la columna  $j$  son independientes.

Resumiendo, las variables destacadas de los modelos de distribución libre son [6]:

$\phi_j$  : representa el parámetro de riesgo para la póliza  $j$ -ésima. Se trata de una variable estructural que describe las características de riesgo de la póliza  $j$ -ésima, con  $j = 1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número total de pólizas en la cartera. En la ciencia actuarial es costumbre considerar a dicho parámetro desconocido y aleatorio.

$X_{ji}$  : representa la experiencia de reclamaciones para la póliza  $j$ -ésima en el periodo  $i$ -ésimo, donde  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $i = 1, 2, \dots, n$ , siendo  $n$  el número de períodos observados para cada póliza. Es también una variable aleatoria, pero con realizaciones observables. En ocasiones se suele interpretar como el monto promedio de las indemnizaciones por siniestro.

Por lo tanto, la póliza  $j$ -ésima es descrita por el vector:

$$(\phi_j, X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}) = \left( \phi_j, \vec{X}_j \right).$$

Además para el desarrollo de los modelos que se explicarán, se usa la siguiente notación:

$$\mu(\phi_j) = E[X_{ji} | \phi_j],$$

como la *prima de riesgo* para la póliza  $j$ , dado  $\phi_j$

$$m = E[\mu(\phi_j)] = E[X_{ji}],$$

para representar el valor esperado de todas las primas de riesgo, es decir, la *prima colectiva*.

Finalmente,

$$a = Var[\mu(\phi_j)],$$

sería la *varianza de las primas de riesgo*, el cual es un indicador de la heterogeneidad de la cartera.

#### 2.2.4.1. Modelo de Bühlmann

El objetivo de este modelo consiste en calcular la **prima lineal ajustada** a la experiencia de cada riesgo, con base en el criterio de mínimos cuadrados, aplicado a una función lineal que solo depende de la experiencia de reclamaciones y cuya calidad de ajuste se mide según la desviación cuadrática esperada.

Sin embargo, una de las principales críticas que recibe este modelo es su rigidez, al considerar independencia dentro y entre las pólizas, y la homeogeneidad en el tiempo con observaciones no ponderadas, pues ignora la información que representa para el asegurado el impacto que tiene una póliza debido a su volumen, siendo apto cuando se trabaja con datos sin tendencia.

A. **Hipótesis del modelo** [3].

- Las pólizas  $j = 1, 2, \dots, k$ , es decir, los pares  $(\phi_1, \vec{X}_1), (\phi_2, \vec{X}_2), \dots, (\phi_k, \vec{X}_k)$  son independientes e idénticamente distribuidas. Es decir, se presenta independencia entre los riesgos (pólizas) y dentro los mismos, o bien, en un análisis da igual coger una póliza que otra.
- Para cada póliza  $j = 1, 2, \dots, k$ , para un  $\phi_j$  dado, las variables condicionadas:  $x_{j1}|\phi_j, x_{j2}|\phi_j, \dots, x_{jn}|\phi_j$  son independientes y están idénticamente distribuidas. Con esta hipótesis no solo se ratifica la independencia dentro de cada riesgo, sino también la homogeneidad en el tiempo, es decir, se asume que un individuo no mejora ni empeora a medida que va pasando el tiempo.

a)  $E[X_{ji}|\phi_j] = \mu(\phi_j) \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}.$

b)  $Cov[\vec{X}_j | \phi_j] = \sigma^2(\phi_j) \cdot I \quad j \in \{1, 2, \dots, k\},$  donde:

$I$  es la matriz identidad, de dimensión  $(k, k)$ ,

$$\sigma^2(\phi_j) = Var[X_{ij}|\phi_j],$$

y  $\vec{X}_{ij}$  es un vector de dimensión  $(k, 1)$ .

**B. Notación requerida** [4]. Para un desarrollo fluido del modelo propuesto por Bühlmann, se recuerda que:

- I.  $\mu(\phi_j) = E[X_{ji}|\phi_j]$ . Prima de riesgo individual para una póliza conc-

reta ( $j$ ), es decir, la esperanza condicionada a un parámetro de riesgo fijo.

- II.  $m = E[X_{ji}] = E[\mu(\phi_j)]$ . Media esperada de reclamaciones para el conjunto de la cartera, es decir, prima de riesgo colectiva o bien, valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- III.  $a = Var[E(X_{ji}|\phi_j)]$ . Mide la dispersión existente entre las primas de riesgo individuales. Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera.
- IV.  $S^2 = E[Var[X_{ji}|\phi_j]] = E[\sigma^2(\phi_j)]$ . Valor esperado de la dispersión total de los datos de reclamaciones de la cartera.

De lo anterior resulta:

$$V. Cov[X_{js}, X_{jt}] = a + \delta_{st} \cdot S^2$$

Donde  $\delta_{st}$  es el símbolo de Kronecker, es decir

$$\delta_{st} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t \end{cases}$$

$$VI. Cov[\mu(\phi_j), X_{ji}] = a.$$

- Para probar V y VI usamos la proposición siguiente:

**Proposición 2.1.** *Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias con distribución*

conjunta dependiente de la variable aleatoria  $\theta$  se verifica [23]:

$$\begin{aligned} E(X) &= E[E(X|\theta)], \\ \text{Cov}(X, Y) &= E[\text{Cov}(X, Y|\theta)] + \text{Cov}[E(X|\theta), E(Y|\theta)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

*Demostración.* Para probar la primera igualdad, lo haremos con el caso discreto

$$\begin{aligned} E[E(X|\theta)] &= \sum_{\theta} E[X|\Theta = \theta]P[\Theta = \theta] \\ &= \sum_{\theta} \sum_x xP[X = x|\Theta = \theta]P[\Theta = \theta] \\ &= \sum_{\theta} \sum_x x \frac{P[X = x, \Theta = \theta]}{P[\Theta = \theta]} P[\Theta = \theta] \\ &= \sum_{\theta} \sum_x xP[X = x, \Theta = \theta] \\ &= \sum_x x \sum_{\theta} P[X = x, \Theta = \theta] \\ &= \sum_x xP[X = x] \\ &= E[X]. \end{aligned}$$



Para la segunda:

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E [[X - E(X)][Y - E(Y)]] \\
&= E [[X - E(X|\theta) + E(X|\theta) - E(X)] \\
&\quad \cdot [Y - E(Y|\theta) + E(Y|\theta) - E(Y)]] \\
&= E [[X - E(X|\theta)][Y - E(Y|\theta)]] \\
&\quad + E [[X - E(X|\theta)][E(Y|\theta) - E(Y)]] \\
&\quad + E [[E(X|\theta) - E(X)][Y - E(Y|\theta)]] \\
&\quad + E [[E(X|\theta) - E(X)][E(Y|\theta) - E(Y)]] \\
&= E [Cov(X, Y|\Theta)] + Cov [E(X|\theta), E(Y|\theta)].
\end{aligned}$$

◇

Si tomamos  $X = Y$ , en el resultado anterior, obtenemos:

$$Var[X] = E[Var(X|\theta)] + Var[E(X|\theta)]. \quad (2.10)$$

Volviendo al caso que queremos probar, el resultado V:

$$Cov [X_{js}, X_{jt}] = a + \delta_{st} \cdot S^2.$$

Para el caso  $s \neq t$ , aplicamos la fórmula 2.9 y la segunda hipótesis del modelo, es decir que,  $X_{js|\phi_j}$  y  $X_{jt|\phi_j}$  son independientes, obtenemos:

$$\begin{aligned}
Cov [X_{js}, X_{jt}] &= E[Cov[X_{js}, X_{jt}|\phi_j]] + Cov[\mu(\phi_j), \mu(\phi_j)] \\
&= 0 + Var[\mu(\phi_j)] \\
&= a.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el caso  $s = t$ , aplicamos la fórmula 2.10 y obtenemos:

$$\begin{aligned}
Cov [X_{js}, X_{jt}] &= Var[X_{js}] \\
&= E[Var[X_{js}|\phi_j]] + Var[E[X_{js}|\phi_j]] \\
&= S^2 + a.
\end{aligned}$$

Y así comprobamos que,

$$Cov [X_{js}, X_{jt}] = a + \delta_{st} \cdot S^2.$$

- Para VI:  $Cov[\mu(\phi_j), X_{js}] = a$ .

Aplicamos nuevamente la fórmula 2.9:

$$\begin{aligned}
Cov [\mu(\phi_j), X_{jt}] &= E[Cov[\mu(\phi_j), X_{jt}|\phi_j]] + Cov[E[\mu(\phi_j)|\phi_j], E[X_{jt}]] \\
&= 0 + Cov[\mu(\phi_j), \mu(\phi_j)] \\
&= Var[\mu(\phi_j)] = a.
\end{aligned}$$

### C. Prima de riesgo individual.

Retomando el modelo de estudio, el objetivo de Bühlmann consiste en calcular la prima de riesgo individual mas ajustada a la experiencia individual,  $\mu(\phi_j)$ , bajo el criterio de mínimos cuadrados. Para ello intentó aproximarla mediante una función [2]:

$$h(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$$

que sólo depende de los datos observados. Para esto se debe calcular la mínima esperanza del cuadrado de la desviación de la prima de riesgo individual, es decir, se debe determinar  $h$  que minimice:

$$l[h] = E [\{\mu(\phi_j) - h(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})\}^2]$$

llegando a la conclusión que la función óptima  $h$ , usando el criterio anterior, es:

$$h(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}) = E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]$$

la cual se conoce como **estimador posterior de Bayes para  $\mu(\phi_j)$** .

Sin embargo, el desarrollo matemático de estas funciones se consideró casi imposible en ese momento, al ser desconocidas tanto la función de distribución de  $X$  como del parámetro de riesgo.

Para solventar parte de este problema, Bühlmann [3] propuso seleccionar la mejor entre la clase restringida de funciones lineales de la forma:

$$c_{j0} + \sum_{i=1}^k c_{ji} \cdot X_{ji}.$$

Para comprobar su teoría Bühlmann estableció el siguiente **Lema**:

**Lema 2.1.** Si dados  $c_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$  tales que se cumple:

$$E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right] \leq E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c'_{j0} - \sum_{i=1}^n c'_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right]$$

para  $c'_{j0}, c'_{j1}, c'_{j2}, \dots, c'_{jn}$  arbitrario, entonces:

$$c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji}$$

es la mejor aproximación lineal para  $E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]$ .

*Demostración.* Desarrollando el lado izquierdo de la expresión:

$$\begin{aligned} & E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right] = \\ &= E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] - (c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji}) \right]^2 \right] \\ &= E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] \right]^2 \right] \\ &\quad + E \left[ \left[ E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] - (c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji}) \right]^2 \right] \\ &\quad - 2 \cdot E \left[ \mu(\phi_j) - E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] \right] \times \\ &\quad \times E \left[ E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] - (c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji}) \right]. \end{aligned}$$

Pero como:

$$E[\mu(\phi_j)] = E[E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]].$$

Entonces,

$$E[\mu(\phi_j) - E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]] = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right] &= \\ &= E \left[ [\mu(\phi_j) - E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]]^2 \right] \\ &\quad + E \left[ [E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}] - (c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji})]^2 \right]. \end{aligned}$$

En la igualdad anterior, el primer sumando no depende de los coeficientes  $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$ , por lo tanto la parte izquierda y derecha de la igualdad están minimizadas por los mismos coeficientes  $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$ , con lo cual se demuestra que si:

$$c_{j0} + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji}$$

es la aproximación lineal para  $\mu(\phi_j)$  que más se ajusta a la experiencia conocida, también lo será para  $E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]$ .

◇

En resumen, al determinar los valores  $c_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$  que minimizan la función:

$$l[c_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}] = E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right] \quad (2.11)$$

estamos encontrando la mejor aproximación lineal para  $E[\mu(\phi_j)|x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]$ , esto según el criterio de la máxima precisión mínimo-cuadrática.

El estimador que resulte del desarrollo explicado se denomina **estimador de credibilidad** y se reconoce con la notación  $\hat{\mu}(\phi_j)$ .

Para determinar este estimador, como se mencionó anteriormente, debemos minimizar la función (2.11), por lo que derivamos dicha función respecto a los  $n + 1$  coeficientes que tenemos e igualamos a cero

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial c_{j0}} &= E \left[ 2 \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \cdot (-1) \right] = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial c_{js}} &= E \left[ 2 \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \cdot (-X_{js}) \right] = 0.\end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} E \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] = 0 \\ E \left[ X_{js} \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \right] = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

De este sistema, si multiplicamos la primera ecuación por  $E[X_{js}]$  y se lo restamos a la segunda, para  $s = 1, 2, \dots, n$  queda:

$$\begin{aligned}E \left[ X_{js} \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \right] \\ - E[X_{js}] \cdot E \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] = 0 \quad (2.13)\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de que la esperanza de una suma es la suma de esperanzas, desarrollamos (2.13) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= E \left[ X_{js} \cdot \mu(\phi_j) - X_{js} \cdot c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \cdot X_{js} \right] \\
&\quad - E[X_{js}] \cdot E[\mu(\phi_j)] + c_{j0} \cdot E[X_{js}] + E[X_{js}] \cdot E \left[ \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right] \\
&= E[X_{js} \cdot \mu(\phi_j)] - c_{j0} \cdot E[X_{js}] - E \left[ \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \cdot X_{js} \right] \\
&\quad - E[X_{js}] \cdot E[\mu(\phi_j)] + c_{j0} \cdot E[X_{js}] + E[X_{js}] \cdot E \left[ \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right] \\
&= E[X_{js} \cdot \mu(\phi_j)] - E[X_{js}] \cdot E[\mu(\phi_j)] - E \left[ X_{js} \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right] \\
&\quad + E[X_{js}] \cdot E \left[ \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right] \\
&= Cov[\mu(\phi_j), X_{js}] - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot Cov[X_{js}, X_{ji}] = 0. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Para así concluir, con  $s = 1, 2, \dots, n$ ,

$$Cov[\mu(\phi_j), X_{js}] = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot Cov[X_{js}, X_{ji}]. \tag{2.15}$$

Pero substituyendo los valores de las covarianzas, obtenidas en la sección anterior, vemos que el resultado final de esta igualdad sería:



$$\text{Cov}[\mu(\phi_j), X_{js}] = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot \text{Cov}[X_{js}, X_{ji}].$$

O sea, por VI:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot (a + \delta_{ji} \cdot S^2) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} + S^2 \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot \delta_{ji} \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} + S^2 \cdot c_{js}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora bien, si en la primera ecuación del sistema (2.12) hacemos reajustes por tratarse de una esperanza de una suma, obtenemos:

$$E[\mu(\phi_j)] - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot E[X_{ji}] = 0. \quad (2.17)$$

Pero además sabemos que  $m = E[\mu(\phi_j)] = E[X_{ji}]$  (por la segunda hipótesis del modelo), entonces de (2.17)

$$m - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot m = 0$$

llegando a la igualdad:

$$m = c_{j0} + m \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji}. \quad (2.18)$$

Por tanto, con los resultados (2.16) y (2.18), el sistema de ecuaciones original (2.12) se puede describir como:

$$c_{j0} + m \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} = m \quad (2.19)$$

$$S^2 \cdot c_{js} + a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} = a, \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Este sistema de ecuaciones es simétrico respecto a los coeficientes  $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$ , es decir:

$$c_{j1} = c_{j2} = \dots = c_{jn} = \mathbf{c}.$$

Haciendo la respectiva sustitución en el sistema de ecuaciones, resulta:

$$c_{j0} + m \cdot n \cdot \mathbf{c} = m \quad (2.21)$$

$$S^2 \cdot \mathbf{c} + a \cdot n \cdot \mathbf{c} = a, \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

De esta última ecuación despejamos  $\mathbf{c}$ , para obtener:

$$\mathbf{c} = \frac{a}{S^2 + a \cdot n}. \quad (2.23)$$

Redefinimos una nueva variable como  $\mathbf{Z}$ , de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z} = \frac{a \cdot n}{S^2 + a \cdot n}. \quad (2.24)$$

Reescribiendo la ecuación (2.23) con esta nueva variable, obtenemos:

$$\mathbf{c} = \frac{a}{S^2 + a \cdot n} = \frac{\mathbf{Z}}{n}. \quad (2.25)$$

Por su parte de la ecuación (2.21) se despeja  $c_{j0}$  para tener:

$$\begin{aligned} c_{j0} &= m \cdot (1 - n \cdot \mathbf{c}) \\ &= m \cdot \left[ 1 - n \cdot \frac{\mathbf{Z}}{n} \right] \\ &= m \cdot [1 - \mathbf{Z}]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por lo tanto, los coeficientes  $c_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$  que minimizan la función (2.11) son:

$$\begin{aligned} c_{j0} &= m \cdot [1 - \mathbf{Z}] \\ c_{j1} = c_{j2} = \dots = c_{jn} &= \mathbf{c} = \frac{\mathbf{Z}}{n}. \end{aligned}$$

Siendo el **estimador ajustado de credibilidad**:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\phi_j) &= c_{j0} + \sum_{i=0}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \\ &= c_{j0} + \mathbf{c} \cdot \sum_{i=0}^n X_{ji}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\widehat{\mu}(\phi_j) = [1 - \mathbf{Z}] \cdot m + \mathbf{Z} \cdot \bar{X}_j \quad (2.27)$$

donde:

$$\mathbf{Z} = \frac{a \cdot n}{S^2 + a \cdot n}$$

$$\bar{X}_j = \sum_{i=1}^n \frac{X_{ji}}{n}.$$

### Propiedades de estimador ajustado de credibilidad - $\widehat{\mu}(\phi_j)$

1. Asegura que los ingresos por primas y los pagos se equilibren conjuntamente en promedio.

$$\begin{aligned}E[\widehat{\mu}(\phi_j)] &= [1 - Z] \cdot E[m] + Z \cdot E[\bar{X}_j] \\ &= [1 - Z] \cdot m + Z \cdot \sum_{i=0}^n \frac{E[X_{ji}]}{n} \\ &= [1 - Z] \cdot m + \frac{Z}{n} \cdot n \cdot m \\ &= [1 - Z] \cdot m + Z \cdot m \\ &= m.\end{aligned}$$

2.  $\hat{\mu}(\phi_j)$  se aproxima a la prima pura verdadera de cada riesgo, cuando  $n$  crece, por cuanto para un parámetro de riesgo dado  $\phi_j$ , la media  $\bar{X}_j$  se aproxima a  $m$  cuando  $n$  tiende a infinito,  $\mathbf{Z}$  se aproxima a la unidad
3. Para la obtención de  $\hat{\mu}(\phi_j)$  no se ha tomado hipótesis sobre el tipo de función de distribución que gobierna el riesgo individual, o de la función de distribución estructural a priori de los parámetros de riesgo.

#### D. Variables estructurales.

Se denominan variables estructurales, precisamente a las primeras tres hipótesis de las que se parte en este modelo, pero que pese a ser desconocidas, son necesarias para el cálculo del estimador ajustado de credibilidad,  $\hat{\mu}(\phi_j)$ .

Aunque la teoría desarrollada por Bühlmann no contempla el cálculo de estos parámetros, se utilizan las definiciones que para dicho fin desarrolló Norberg [18].

Los parámetros a los que nos referimos son:

- $m = E[X_{js}] = E[\mu(\phi_j)],$
- $a = Var[E[X_{js}|\phi_j]] = Var[\mu(\phi_j)],$
- $S^2 = E[Var[X_{js}]] = E[\sigma^2(\phi_j)].$

**Estimación Media Poblacional (m):** Intuitivamente nos referimos al valor medio observado:

$$\hat{m} = \bar{X} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \bar{X}_j = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{X_{ji}}{n}. \quad (2.28)$$

**Estimación de  $S^2 = E[\sigma^2(\phi_j)]$ :** Representa el valor esperado de la dispersión total de los datos en el tiempo. Siendo lógico utilizar el valor medio de las  $k$  varianzas individuales empíricas:

$$\begin{aligned} \widehat{S^2} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \hat{s}_j^2 \\ \hat{s}_j^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_{ji} - \bar{X}_j)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $\hat{s}_j^2$  es la varianza individual empírica del  $j$ -ésimo riesgo.

**Estimación de  $a = Var[\mu(\phi_j)]$ :** Representa la variación de la prima pura verdadera individual entre los riesgos en la población; se puede estimar con la varianza empírica de la prima pura observada, es decir:

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^k (\bar{X}_j - \bar{X})^2 - \frac{1}{n} \cdot \widehat{S^2} \quad (2.30)$$

el factor  $\frac{1}{n} \cdot \widehat{S^2}$  corresponde a un ajuste que se hace al estadístico en aras de que sea insesgado, con el propósito de considerar la variación accidental dentro del riesgo de un periodo a otro que puede existir, y reflejarse en el estimador  $\hat{\mu}(\phi_j)$ .

Los estimadores que acabamos de ver son insesgados y consistentes, es decir:

$$E(\widehat{m}) = m$$

$$E(\widehat{s}) = E[\sigma(\phi_j)]$$

$$E(\widehat{a}) = Var[\mu(\phi_j)]$$

$$(\widehat{m}, \widehat{s}^2, \widehat{a}) \longrightarrow (m, s^2, a), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

#### 2.2.4.2. Modelo de Bühlmann-Straub

El modelo de Bühlmann-Straub es una generalización del Modelo de Bühlmann que analizamos en la sección anterior.

Este modelo mantiene el supuesto de ser homogéneo en el tiempo, pero agrega el hecho de utilizar observaciones ponderadas, con lo cual la varianza de dichas observaciones deja de ser constante en el tiempo y por ende pasa a depender del período considerado en el estudio. Esto además permite superar una de las limitaciones del modelo anterior, como es que todas las pólizas tienen la misma importancia dentro de la cartera, independientemente del volumen.

Para esta nueva medición se agrega una variable adicional al modelo de Bühlmann y corresponde a:

$w_{ji}$ : Pesos o ponderaciones naturales, que suelen representar el número de reclamos o bien volumen de primas, según el enfoque que se utilice para  $X_{ji}$ .

Otra característica de este modelo, es que el factor de credibilidad no es constante para toda la cartera, por el contrario, en este análisis cada póliza tiene su propio factor de credibilidad.

Al igual que el modelo de Bühlmann, este sólo es apto para trabajar datos deflatados o sin tendencia.

#### A. Hipótesis del modelo [23].

- Las pólizas  $j = 1, 2, \dots, k$ , es decir, los pares  $(\phi_1, \vec{x}_1), (\phi_2, \vec{x}_2), \dots, (\phi_k, \vec{x}_k)$  son independientes, y las variables de riesgo  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  son idénticamente distribuidas.
- Para cada póliza  $j = 1, 2, \dots, k$ , para un  $\phi_j$  dado, las variables condicionadas:  $X_{j1}|\phi_j, X_{j2}|\phi_j, \dots, X_{jn}|\phi_j$  son independientes y están idénticamente distribuidas. Con esta hipótesis no solo se ratifica la independencia dentro de cada riesgo, sino también la homogeneidad en el tiempo, es decir,

$$\text{a) } E[X_{ji}|\phi_j] = \mu(\phi_j), \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Sin embargo, la varianza sí depende del periodo de estudio, mediante las ponderaciones naturales, ya que:

$$\text{Var}[X_{ji}|\phi_j] = \frac{1}{w_{ji}} \cdot \sigma^2(\phi_j).$$



$$b) \text{Cov}[X_{js}, X_{ji} | \phi_j] = \delta_{si} \sigma^2(\phi_j).$$

### B. Notación requerida.

Se mantienen las utilizadas en el modelo de Bühlmann, a excepción de una pequeña modificación en la interpretación de la variable  $X_{ji}$ , pues si esta se interpreta como el costo promedio por siniestro,  $w_{ji}$  sería el número de pólizas que han tenido siniestro, en el periodo estudiado.

Por lo tanto [23],

$$X_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{w_{ji}} x_{jk}}{w_{ji}}.$$

### C. Prima de riesgo individual.

Se requiere encontrar el mejor estimador para la prima de riesgo individual,  $\mu(\phi_j)$ , por lo que utilizando el mismo procedimiento y notación que en el modelo de Bühlmann [23], determinamos los valores  $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$  que minimizan la función:

$$l[c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}] = E \left[ \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \right]^2 \right]. \quad (2.31)$$

Derivando dicha función respecto a los  $n + 1$  coeficientes e igualamos a cero se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial c_{j0}} &= E \left[ 2 \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \cdot (-1) \right] = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial c_{js}} &= E \left[ 2 \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \cdot (-X_{js}) \right] = 0.\end{aligned}$$

Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} E \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] = 0 \\ E \left[ X_{js} \cdot \left[ \mu(\phi_j) - c_{j0} - \sum_{i=1}^n c_{ji} X_{ji} \right] \right] = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

De este sistema, multiplicando la primera ecuación por  $E[X_{js}]$  y restándolo a la segunda, para  $s = 1, 2, \dots, n$  queda la siguiente expresión, ya obtenida con detalle en el modelo de Bühlmann mediante la ecuación (2.15)

$$Cov[\mu(\phi_j), X_{js}] = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot Cov[X_{js}, X_{ji}]. \quad (2.33)$$

Pero sustituyendo los valores de las covarianzas, obtenidas en la sección anterior, se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
Cov[\mu(\phi_j), X_{js}] &= E[Cov[\mu(\phi_j), X_{js}]] \\
&+ Cov[E[\mu(\phi_j)|\phi_j], E[X_{js}|\phi_j]] \\
&= 0 + Cov[\mu(\phi_j), \mu(\phi_j)] \\
&= Var[\mu(\phi_j)] = a.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Para determinar el valor de  $Cov[X_{js}, X_{ji}]$  veamos:

- $s \neq i$ :

$$\begin{aligned}
Cov[X_{js}, X_{ji}] &= E[Cov[X_{js}, X_{ji}|\phi_j]] \\
&+ Cov[E[X_{js}|\phi_j], E[X_{ji}|\phi_j]] \\
&= 0 + Var[\mu(\phi_j)] \\
&= a.
\end{aligned}$$

- $s = i$ :

$$\begin{aligned}
Cov[X_{js}, X_{js}] &= Var[X_{js}] \\
&= E[Var[X_{js}|\phi_j]] + Var[E[X_{js}|\phi_j]] \\
&= E\left[\frac{1}{w_{js}} \cdot \sigma^2(\phi_j)\right] + Var[\mu(\phi_j)] \\
&= \frac{1}{w_{js}} \cdot E[\sigma^2(\phi_j)] + a \\
&= \frac{1}{w_{js}} \cdot S^2 + a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Cov[X_{js}, X_{ji}] = a + \delta_{si} \frac{1}{w_{js}} \cdot S^2. \quad (2.35)$$

Utilizando los resultados de (2.34) y (2.35) en (2.33) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot \left[ a + \delta_{si} \cdot \frac{1}{w_{ji}} \cdot S^2 \right] \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} + S^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{c_{ji}}{w_{ji}} \cdot \delta_{si} \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} + S^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{c_{ji}}{w_{ji}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Al utilizar la primera ecuación del sistema (2.32) y calculando la esperanza para sustituir las expresiones por su valor, se obtiene:

$$m = c_{j0} + m \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji}. \quad (2.37)$$

Por tanto, con los resultados (2.36) y (2.37), el sistema de ecuaciones original (2.32) se puede reescribir como:

$$m = c_{j0} + m \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji} \quad (2.38)$$

$$a = S^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{c_{ji}}{w_{ji}} \cdot \delta_{si} + a \cdot \sum_{i=1}^n c_{ji}. \quad (2.39)$$

Este sistema de ecuaciones es simétrico respecto a  $\frac{c_{ji}}{w_{ji}}$ , es decir:

$$\frac{c_{j1}}{w_{j1}} = \frac{c_{j2}}{w_{j2}} = \dots = \frac{c_{jn}}{w_{jn}} = c_j = \text{CONSTANTE}$$

que a su vez implica:

$$c_{ji} = c_j \cdot w_{ji}. \quad (2.40)$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones, y despejando se llega a:

$$c_j = \frac{a}{S^2 + a \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji}}. \quad (2.41)$$

Redefiniendo una nueva variable como en el Modelo de Bühlmann,  $Z_j$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z_j &= \frac{a \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji}}{S^2 + a \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji}} \\ &= \frac{a \cdot w_{j.}}{S^2 + a \cdot w_{j.}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde,

$$w_{j.} = \sum_{i=1}^n w_{ji}.$$

Reescribiendo la ecuación (2.41) con esta nueva variable, se obtiene:

$$c_j = \frac{Z_j}{w_j}. \quad (2.43)$$

Y además,

$$c_{ji} = \frac{Z_j}{w_j} \cdot w_{ji}. \quad (2.44)$$

Si la ecuación (2.37) se sustituye  $c_{ji}$  por (2.40) se obtiene:

$$\begin{aligned} c_{j0} &= m \cdot \left[ 1 - \sum_{i=1}^n c_{ji} \right] \\ &= m \cdot \left[ 1 - \sum_{i=1}^n c_j \cdot w_{ji} \right] \\ &= m \cdot \left[ 1 - \sum_{i=1}^n c_j \right] \\ &= m \cdot \left[ 1 - \frac{Z_j}{w_j} \cdot w_j \right] \\ &= m \cdot [1 - Z_j]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, los coeficientes  $c_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$  que minimizan la función (2.31) son:

$$\begin{aligned} c_{j0} &= m \cdot [1 - Z_j] \\ c_{ji} &= \frac{Z_j}{w_j} \cdot w_{ji}. \end{aligned}$$

Siendo el **estimador ajustado de credibilidad**:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu}(\phi_j) &= c_{j0} + \sum_{i=0}^n c_{ji} \cdot X_{ji} \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + \sum_{i=1}^n \frac{Z_j}{w_{j\cdot}} \cdot w_{ji} \cdot X_{ji} \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji} \cdot X_{ji}}{w_{j\cdot}}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Z_j &= \frac{a \cdot w_{j\cdot}}{S^2 + a \cdot w_{j\cdot}} \\
 w_{j\cdot} &= \sum_{i=1}^n w_{ji} \\
 X_{jw} &= \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji} \cdot X_{ji}}{w_{j\cdot}}.
 \end{aligned}$$

Finalmente el estimador se busca es:

$$\widehat{\mu}(\phi_j) = [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot X_{jw}. \tag{2.47}$$

**Propiedades de estimador ajustado de credibilidad  $\widehat{\mu}(\phi_j)$ :**

1. Asegura que los ingresos por primas y los pagos se equilibren inmedi-

atamente en promedio.

$$\begin{aligned}
 E[\widehat{\mu}(\phi_j)] &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot E[X_{jw}] \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji} \cdot E[X_{ji}]}{w_j} \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji} \cdot m}{w_j} \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot m \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji}}{w_j} \\
 &= [1 - Z_j] \cdot m + Z_j \cdot m \\
 &= m.
 \end{aligned}$$

2.  $\widehat{\mu}(\phi_j)$  se aproxima a la prima pura verdadera de cada riesgo, cuando  $n$  crece, por cuanto para un parámetro de riesgo dado  $\phi_j$ , la media  $\bar{X}$  se aproxima a  $m$  cuando  $n$  tiende a infinito,  $Z$  se aproxima a la unidad
3. Para la obtención de  $\widehat{\mu}(\phi_j)$  no se ha tomado hipótesis sobre el tipo de función de distribución que gobierna el riesgo individual, o de la función de distribución estructural a priori de los parámetros de riesgo.

#### D. Variables estructurales [23]:

- $m = E[\mu(\phi_j)]$ .
- $Z_j = \frac{a \cdot w_j}{S^2 + a \cdot w_j}$ .
- $X_{jw} = \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji} \cdot X_{ji}}{w_j}$ .



En los cuales aparecen los parámetros a estimar  $m, a, S^2$

Considerando las siguientes variables

$$\begin{aligned}
 E[X_{jw}|\phi_j] &= E\left[\sum_{i=1}^n \frac{w_{ji}}{w_{j\cdot}} \cdot X_{ji}|\phi_j\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{w_{ji}}{w_{j\cdot}} \cdot E[X_{ji}|\phi_j] \\
 &= \frac{1}{w_{j\cdot}} \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji} \cdot \mu(\phi_j) \\
 &= \frac{\mu(\phi_j)}{w_{j\cdot}} \sum_{i=1}^n w_{ji} = \mu(\phi_j), \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var[X_{jw}|\phi_j] &= Var\left[\sum_{i=1}^n \frac{w_{ji}}{w_{j\cdot}} \cdot X_{ji}|\phi_j\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_{ji}}{w_{j\cdot}}\right]^2 \cdot Var[X_{ji}|\phi_j] \\
 &= \frac{1}{w_{j\cdot}^2} \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji}^2 \cdot \frac{\sigma^2(\phi_j)}{w_{ji}} \\
 &= \frac{\sigma^2(\phi_j)}{w_{j\cdot}^2} \sum_{i=1}^n w_{ji} \\
 &= \frac{\sigma^2(\phi_j)}{w_{j\cdot}}. \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

Además se sabe que las  $X_{ji}|\phi_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$ , son independientes, entonces:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_{jw}] &= E[\text{Var}[X_{jw}|\phi_j]] + \text{Var}[E[X_{jw}|\phi_j]] \\
 &= E\left[\frac{\sigma^2(\phi_j)}{w_j}\right] + \text{Var}[\mu(\phi_j)] \\
 &= \frac{1}{w_j} \cdot E[\sigma^2(\phi_j)] + a \\
 &= \frac{S^2}{w_j} + a \\
 &= \frac{S^2 + a \cdot w_j}{w_j}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

De (2.50) se llega a:

$$S^2 + a \cdot w_j = w_j \cdot \text{Var}[X_{jw}]. \tag{2.51}$$

Sustituyendo este resultado (2.51) en la ecuación (2.42) se obtiene el **factor de credibilidad**  $Z_j$

$$\begin{aligned}
 Z_j &= \frac{a \cdot w_j}{S^2 + a \cdot w_j} \\
 &= \frac{a \cdot w_j}{w_j \cdot \text{Var}[X_{jw}]} \\
 &= \frac{a}{\text{Var}[X_{jw}]} \\
 &= \frac{\text{Var}[\mu(\phi_j)]}{\text{Var}[X_{jw}]}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Es decir, el factor de credibilidad se puede calcular como el cociente entre la varianza de la prima de riesgo individual y la varianza de su estimador individual.

**Estimación Media Poblacional (m):** Se puede tomar como estimador la media aritmética de las medias individuales,  $X_{ww}$ , es decir:

$$X_{ww} = \sum_{j=1}^k \frac{X_{jw} \cdot w_j}{w_{..}}$$

con,

$$w_{j\cdot} = \sum_{s=1}^k w_{js}$$

$$w_{..} = \sum_{j=1}^k w_j. \quad (2.53)$$

En [23], se considera como mejor estimador lineal insesgado para  $m$  a:

$$\hat{m} = X_{zw} = \sum_{j=1}^k \frac{Z_j}{Z_{\cdot}} \cdot X_{jw} \quad (2.54)$$

donde  $Z_{\cdot} = \sum_{j=1}^k Z_j$ .

**Estimación de  $S^2 = E[\sigma^2(\phi_j)]$ :** Bühlmann y Straub, consideran como mejor estimador el valor promedio de las  $k$  varianzas individuales empíricas:

$$\begin{aligned} \widehat{S^2} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji} \cdot (X_{ji} - X_{jw})^2 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k S_j \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde,

$$S_j = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n w_{ji} \cdot (X_{ji} - \widehat{m})^2 \quad (2.56)$$

$$E[S_j | \phi_j] = \sigma^2(\phi_j).$$

**Estimación de  $a = Var[\mu(\phi_j)]$ :** Bühlmann y Straub propusieron el siguiente estimador  $\widehat{a}$ . Representa la variación de la prima pura verdadera individual entre los riesgos en la población, es decir:

$$\widehat{a} = \frac{1}{c} \cdot \left[ \sum_{j=1}^k \frac{w_{j\cdot}}{w_{j\cdot}} \cdot (X_{jw} - X_{ww})^2 - (k-1) \frac{\widehat{S^2}}{w_{\cdot\cdot}} \right] \quad (2.57)$$

con,

$$c = \sum_{j=1}^k \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \cdot \left[ 1 - \frac{w_{j\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \right].$$

### 2.2.5. Modelos de Regresión

Se han denominado así aquellos modelos que hacen uso de la técnica de regresión en la estimación de la prima esperada, además se distinguen de los modelos clásicos porque abandonan totalmente la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, tanto en las observaciones esperadas como en la matriz de covarianzas.

---

Estos modelos fueron desarrollados por Hachemeister (1975), como una generalización de Bühlmann-Straub, asumiendo que las observaciones esperadas se ajustan a una función de regresión.

En su modelo Hachemeister sigue utilizando el procedimiento de mínimos cuadrados para hallar la mejor aproximación lineal de las primas de riesgo individuales. Si bien existen otros modelos que se denominan como modelos de regresión, en esta sección nos referiremos únicamente al **Modelo de Hachemeister**.

Es importante resaltar que en este tipo de modelo los factores de credibilidad dejan de ser escalares para convertirse en matrices conocidas como **matrices de credibilidad**, esto debido a que el modelo se desarrolla en forma matricial.

Otra gran diferencia con los modelos clásicos, es que estos son aptos para detectar tendencias y tener en cuenta los efectos de inflación.

#### 2.2.5.1. Modelo de Hachemeister

Hachemeister [9] planteó la necesidad de establecer estimaciones para las tendencias que presentaban los datos de los montos de reclamos en los seguros de automóviles por regiones, debido a los efectos de la inflación. En su opinión la inflación se había convertido en un elemento importante a tener en cuenta en las tarifaciones.

Partiendo de los montos de reclamos por estados y por periodos, propuso

utilizar un estimador que fuera una ponderación entre el estimador individual para cada estado y el estimador para el conjunto del país, utilizando para ellos un modelo de regresión lineal.

En este modelo se permite tanto la variación en el tiempo, no sólo con  $Var[X_{ji}|\phi_j]$  sino también con  $E[X_j|\phi_j]$ , pues se sustituye la hipótesis de homogeneidad en el tiempo por una de tipo matricial, con la cual los efectos de la inflación se pueden incluir en el análisis. Además, con la técnica de regresión se calculan los estimadores de credibilidad de este modelo.

#### A. Variables ejes del modelo [9]:

$\phi_j$  : representa el parámetro de riesgo para la póliza  $j$ -ésima. Se trata de una variable estructural que describe las características de riesgo del contrato  $j$ -ésimo, con  $j = 1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número total de pólizas en la cartera. En la ciencia actuarial es costumbre considerar a dicho parámetro desconocido y aleatorio.

$X_{ji}$  : representa la experiencia de reclamos para la póliza  $j$ -ésima en el periodo  $i$ -ésimo, donde  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $i = 1, 2, \dots, t_j$ , siendo  $t_j$  el número de periodos observados para la póliza  $j$ -ésima.

$Y_j$  : Matriz dada de dimensión  $(t_j, n)$  de rango completo  $n$ , que debe verificar  $n < t_j$ . La  $n$  indica el grado del ajuste más la unidad, de la mayor tendencia polinómica prevista para las distintas pólizas que integran la cartera. Siendo  $Y'_{js}$  el vector fila  $s$ -ésimo de la matriz  $Y_j$ .

$v_j$  : Matriz dada de dimensión  $(t_j, t_j)$  y semidefinida positiva, con  
 $j = 1, 2, \dots, k$

### B. Hipótesis del modelo [23]:

- Las pólizas  $j = 1, 2, \dots, k$ , es decir, los pares  $(\phi_1, \vec{x}_1), (\phi_2, \vec{x}_2), \dots, (\phi_k, \vec{x}_k)$  son independientes, y las variables de riesgo  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  son idénticamente distribuidas. Se mantiene el supuesto de independencia entre las pólizas, y la equivalencia exterior de las mismas.
- Para todo  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $r, s = 1, 2, \dots, t_j$  se tiene:

a)  $E[X_{ji}|\phi_j] = Y_j \cdot \beta(\phi_j)$

con  $\beta(\phi_j)$  como vector de regresión desconocido y dimensión  $(n, 1)$ ,  $Y_j$  es una matriz dada de dimensión  $(t_j, n)$  y  $X_j$  es un vector columna:

$$X_j = \begin{bmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jt} \end{bmatrix} \quad \text{con,} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}$$

La inclusión de las matrices  $Y_j$  reemplaza el supuesto de homogeneidad en el tiempo por otra de tipo matricial. Con esto se logra incorporar tendencias o efectos de inflación en el modelo.

Para el caso particular en que  $n = 2$ , la matriz  $Y_j$  sería:

$$Y_j = \begin{bmatrix} 1 & t_j \\ 1 & t_j - 1 \\ 1 & t_j - 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{o bien,} \quad Y_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_j \end{bmatrix}$$

Esta hipótesis es una ampliación de la considerada por Bühlmann-Straub y que implicaba homogeneidad en el tiempo de las observaciones esperadas,  $E[X_{js}|\phi_j] = \mu(\phi_j)$ , para  $s \in (1, 2, \dots, t_j)$

- b)  $Cov[X_j|\phi_j] = \sigma^2(\phi_j) \cdot v_j$ . con  $\sigma^2(\phi_j)$  función escalar desconocida, y  $[\sigma^2(\phi_j) \cdot v_j]$  la matriz de varianzas y covarianzas correspondiente a la póliza  $j$ -ésima.

### C. Notación previa:

- $\beta = E[\beta(\phi_j)]$ : Vector de dimensión  $(n, 1)$ .
- Matriz de covarianza de los coeficientes de regresión, de dimensión  $(n, n)$ :

$$\Gamma = Cov[\beta(\phi_j), \beta'(\phi_j)] = E[\beta(\phi_j) \cdot \beta'(\phi_j)] - \beta \cdot \beta'.$$

- $\mu_{js}(\phi_j) = E[X_{js}|\phi_j] = Y'_{js} \cdot \beta(\phi_j)$ , si se calcula la esperanza de  $\mu_{js}(\phi_j)$  con respecto a los diferentes parámetros de  $\phi$ , se tiene:

$$E[\mu_{js}(\phi_j)] = E[Y'_{js} \cdot \beta(\phi_j)] = Y'_{js} \cdot E[\beta(\phi_j)] = Y'_{js} \cdot \beta$$

$$\text{entonces } E[X_{js}] = Y'_{js} \beta.$$



Además, de manera similar se obtiene  $E[X_j|\phi_j]$ :

$$E[X_j|\phi_j] = \mu_j(\phi_j) = Y_j \cdot \beta(\phi_j).$$

Calculando la esperanza con respecto a  $\phi$  tenemos:

$$E[\mu_j(\phi_j)] = E[Y_j \cdot \beta(\phi_j)] = Y_j \cdot E[\beta(\phi_j)] = Y_j \cdot \beta$$

$$\text{entonces, } E[X] = E \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \cdot \beta \\ Y_2 \cdot \beta \\ \vdots \\ Y_j \cdot \beta \\ \vdots \\ Y_k \cdot \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_j \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} \cdot \beta = Y^* \cdot \beta = m$$

donde  $Y^*$  es una matriz particionada de dimensión  $(\sum_{j=1}^k t_j, n)$ , por tanto sus elementos a su vez son matrices de dimensión  $(t_j, n)$ .

- Matriz de covarianzas entre  $X_i$  y  $\mu_{js}(\phi_j)$ , para  $i = 1, 2, \dots, j \dots, k$  sería:

$$Cov[X_i, \mu_{js}(\phi_j)] = \delta_{ij} \cdot Cov[X_i, \mu_{js}(\phi_j)]$$

por la hipótesis de independencia asumida entre las pólizas.

Si  $i = j$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
Cov[X_j, \mu_{js}(\phi_j)] &= E [Cov[X_j, \mu_{js}(\phi_j)|\phi_j]] + \\
&+ Cov [E[X_j|\phi_j], E[\mu_{js}(\phi_j)|\phi_j]] \\
&= 0 + Cov[\mu_j(\phi_j), \mu_{js}(\phi_j)] \\
&= Cov[Y_j \cdot \beta(\phi_j), Y'_{js} \cdot \beta(\phi_j)] \\
&= Y_j \cdot Cov[\beta(\phi_j)] \cdot Y'_j \\
&= Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js}
\end{aligned}$$

obteniendo,  $Cov[X, \mu_{js}(\phi_j)] = \begin{bmatrix} Y_1 \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \cdot \delta_{1j} \\ Y_2 \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \cdot \delta_{2j} \\ \vdots \\ Y_k \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \cdot \delta_{kj} \end{bmatrix}$

- La matriz de covarianzas entre las variables de experiencia de reclamaciones:

$$C = Cov[X, X'] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_k \end{bmatrix}$$

con la hipótesis de independencia asumida en el modelo se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_j = Cov[X_j, X'_j] &= E[Cov[X_j, X'_j|\phi_j]] + Cov[E[X_j|\phi_j], E[X'_j|\phi_j]] \\
&= E[Var[X_j|\phi_j]] + Cov[\mu_j(\phi_j), \mu'_j(\phi_j)] \\
&= E[\sigma^2(\phi_j)] \cdot v_j + Cov[Y_j \cdot \beta(\phi_j), \beta'(\phi_j) \cdot Y'_j] \\
&= S^2 \cdot v_j + Y_j \cdot Cov[\beta(\phi_j)] \cdot Y'_j \\
&= V_j + Y_j \cdot \Gamma \cdot Y'_j.
\end{aligned}$$

Siendo  $V_j = S^2 \cdot v_j$ , una matriz cuadrada de dimensión  $(t_j, t_j)$ .

#### D. Prima de riesgo individual.

Para poder estimar la prima de riesgo individual Hachemeister [9] propone lo siguiente:

Para estimar la prima de riesgo individual para la póliza  $j$ -ésima, en el periodo  $s$ -ésimo utiliza:

$$E[X_{js}|\phi_j] = Y'_{js} \cdot \beta(\phi_j) = \mu_{js}(\phi_j)$$

donde  $Y'_{js}$  es el vector fila  $s$ -ésimo de la matriz anteriormente definida.

Como en el modelo de Bühlmann, se supone que existe un estimador óptimo  $\hat{\mu}_{js}^*(\phi_j)$  que cumple:

$$E[[\mu_{js}(\phi_j) - \hat{\mu}_{js}^*(\phi_j)]^2] \leq E[[\mu_{js}(\phi_j) - \hat{\mu}_{js}(\phi_j)]^2].$$

Además se consideran los estimadores lineales:

$$\widehat{\mu}_{js}(\phi_j) = a_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{t_i} a_{ir} \cdot X_{ir} = a_0 + X' \cdot A$$

donde  $X$  es un vector columna particionado de dimensión  $(\sum_{i=1}^k t_i, 1)$  y  $X_i$  también es un vector columna pero de dimensión  $(t_i, 1)$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \quad \text{con,} \quad X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{ir} \\ \vdots \\ X_{it_i} \end{bmatrix}$$

De la misma manera, se define  $A$  como:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} \quad \text{con,} \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ir} \\ \vdots \\ a_{it_i} \end{bmatrix}$$

Análogo a los modelos anteriores, la mejor aproximación lineal para la prima de riesgo individual se obtiene encontrando los valores de  $a_0$  y de  $a_{ir}$  con  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $r = 1, 2, \dots, t_i$  que minimicen la siguiente expresión:

$$\varphi_{js} = E[(\mu_{js}(\phi_j) - a_0 - X' \cdot A)^2]$$

que incluye  $(\sum_{i=1}^k t_i + 1)$  parámetros.

Como se ha procedido en los modelos anteriores, se deriva parcialmente  $\varphi_{js}$  respecto a  $a_0$  y  $A$  y se iguala a cero, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{js}}{\partial a_0} = -2 \cdot E[\mu_{js}(\phi_j) - a_0 - X' \cdot A] = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{js}}{\partial A} = -2 \cdot E[X \cdot [\mu_{js}(\phi_j) - a_0 - X' \cdot A]] = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

De la primera ecuación en (2.58) se tiene:

$$E[\mu_{js}(\phi_j)] - a_0 - E[X'] \cdot A = 0. \quad (2.59)$$

Despejando y sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= E[\mu_{js}(\phi_j)] - E[X'] \cdot A \\ &= Y'_{js} \cdot \beta - \beta' \cdot Y^* \cdot A \\ &= \beta' [Y_{js} - Y^* \cdot A]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

De la segunda ecuación en (2.58) se llega a:

$$\begin{aligned}
E[X \cdot [\mu_{js}(\phi_j) - a_0 - X' \cdot A]] &= 0 \\
E[X \cdot \mu_{js}(\phi_j)] - E[X] \cdot a_0 - E[X \cdot X'] \cdot A &= 0 \\
E[X \cdot \mu_{js}(\phi_j)] - E[X] \cdot E[X \cdot \mu_{js}(\phi_j)] \\
+E[X] \cdot E[X'] \cdot A - E[X \cdot X'] \cdot A &= 0.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Reordenando y con factor común, se obtiene:

$$\begin{aligned}
Cov[X, \mu_{js}(\phi_j)] - Cov[X \cdot X'] \cdot A &= 0 \\
\text{es decir, } Cov[X, X'] \cdot A &= Cov[X, \mu_{js}(\phi_j)] \\
\text{o bien, } [V_i + Y_i \cdot \Gamma \cdot Y_i'] \cdot A_i &= Y_i \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \cdot \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

para  $i = 1, 2, \dots, k$ , siendo este un sistema de  $\sum_{i=1}^k t_i$  ecuaciones con  $\sum_{i=1}^k t_i$  incógnitas  $a_{ir}$ .

Si  $i \neq j$ , el sistema de ecuaciones anterior se convierte en:

$$[V_i + Y_i \cdot \Gamma \cdot Y_i'] \cdot A_i = 0$$

para  $i = 1, 2, \dots, k - j$ , resultando un sistema de ecuaciones homogéneo, ya que por la hipótesis de independencia asumida entre las pólizas, todas las pólizas son independientes, siendo el rango de la matriz asociada al sistema igual al número de incógnitas.

Al tener solución trivial resulta que:

$$A_i = 0 \quad i \neq j$$

lo que implica que todos los coeficientes  $a_{ir}$  son iguales a cero para  $i = 1, 2, \dots, k - j$  y  $r = 1, 2, \dots, t_i$

Si  $i = j$  el sistema de ecuaciones (2.62) se transforma en:

$$[V_i + Y_i \cdot \Gamma \cdot Y_i'] \cdot A_i = Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \quad (2.63)$$

siendo este un sistema con  $t_j$  ecuaciones y  $t_j$  incógnitas  $a_{js}$ , con  $s = 1, 2, \dots, t_j$ .

Si la ecuación (2.62) se multiplica por  $(Y_j' \cdot V_j^{-1})$  se obtiene:

$$[Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot V_j + Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_j'] \cdot A_j = Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js}. \quad (2.64)$$

Pero,

$$Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot V_j = Y_j' \cdot I_{t,t} = I_{n,n} \cdot Y_j'$$

Reordenando se puede despejar  $Y_j' \cdot A_j$ :

$$[I + Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma] \cdot Y_j' \cdot A_j = Y_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} Y_j' \cdot A_j &= [I + Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma]^{-1} \cdot Y_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \\ &= Y_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot [I + Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma]^{-1} \cdot Y_{js} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Definiendo una nueva matriz  $Z_j$ :

$$Z_j = Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot [I + Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma]^{-1}. \quad (2.67)$$

La ecuación (2.66) se puede escribir:

$$Y_j' \cdot A_j = Z_j \cdot Y_{js}. \quad (2.68)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.65) se tiene:

$$V_j \cdot A_j + Y_j \cdot \Gamma \cdot Z_j \cdot Y_{js} = Y_j \cdot \Gamma \cdot Y_{js} \quad (2.69)$$

donde podemos despejar  $A_j$  para obtener:

$$A_j = V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot [I - Z_j] \cdot Y_{js}. \quad (2.70)$$

Sustituyendo esto en (2.68) llegamos a:

$$Z_j = Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot [I - Z_j] \quad (2.71)$$

donde,

$$[I - Z_j] = (Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma)^{-1} \cdot Z_j. \quad (2.72)$$

Al sustituir y despejar en (2.67),



$$A_j = V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot (Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma)^{-1} \cdot Z_j \cdot Y_{js}. \quad (2.73)$$

Ahora si se multiplica el resultado anterior por  $X_j'$  resulta:

$$X_j' \cdot A_j = \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j \cdot Y_{js} \quad (2.74)$$

con,

$$\widehat{\beta}'_j = X_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot (Y_j' \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j)^{-1} \quad (2.75)$$

$$= X_j' \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j \cdot (Y_j' \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j)^{-1} \quad (2.76)$$

pues  $V_j = S^2 \cdot v_j$

El vector  $\beta'_j$ , no es más que un **estimador mínimo-cuadrático generalizado** para el modelo de regresión multivariado, basado en  $X_j$ .

Con el desarrollo realizado, se obtuvo (2.58), pero además se tiene que  $A_i = 0$  para  $i \neq j$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$ , por tanto,

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta' \cdot [Y_{js} - Y_j' \cdot A_j] \\ &= \beta' \cdot [I - Z_j] \cdot Y_{js}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Resumiendo, las expresiones necesitadas son:

$$a_0 = \beta' \cdot [I - Z_j] \cdot Y_{js} \quad (2.78)$$

$$X_j' \cdot A_j = \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j \cdot Y_{js}. \quad (2.79)$$

Con estos resultados, ya se puede pasar al desarrollo del estimador óptimo para la prima de riesgo individual,  $\widehat{\mu}_{js}(\phi_j)$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{js}(\phi_j) &= a_0 + X' \cdot A = a_0 + \sum_{i=1}^k X_i' \cdot A_i \\ &= a_0 + X_j' \cdot A_j = \beta' \cdot [I - Z_j] \cdot Y_{js} + \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j \cdot Y_{js} \\ &= \left[ \beta' \cdot [I - Z_j] \cdot Y_{js} + \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j \right] \cdot Y_{js} \\ &= \widehat{\beta}'(\phi_j) \cdot Y_{js}. \end{aligned}$$

Lo anterior es posible, pues:

$$\widehat{\beta}'(\phi_j) = \beta' \cdot [I - Z_j] + \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j.$$

La matriz  $Z_j$ , se conoce como **matriz de credibilidad**, y existen varias formas de representarla, por ejemplo definiendo  $w_j = \left( Y_j' \cdot v_j'^{-1} \cdot Y_j \right)^{-1}$

$$\begin{aligned}
Z_j &= \Gamma \cdot (\Gamma + S^2 \cdot w_j)^{-1} \\
&= Y_j' \cdot (S^2 \cdot w_j)^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot [I - Y_j' \cdot (S^2 \cdot w_j)^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma]^{-1} \\
&= (S^2 \cdot w_j)^{-1} \cdot \Gamma \cdot [I + (S^2 \cdot w_j)^{-1} \Gamma]^{-1} \\
&= \Gamma \cdot [(I + (S^2 \cdot w_j)^{-1} \Gamma) \cdot S^2 \cdot w_j]^{-1} \\
&= \Gamma \cdot (S^2 \cdot w_j + \Gamma)^{-1} \\
&= \Gamma \cdot (\Gamma + S^2 \cdot w_j)^{-1}.
\end{aligned}$$

### E. Variables estructurales

En [23], las variables requeridas son:

- $\beta = E[\beta(\phi_j)]$
- $S^2 = E[\sigma^2(\phi_j)]$
- $\Gamma = Cov[\beta(\phi_j)]$ .

**Estimación de  $\beta = E[\beta(\phi_j)]$  :**

$$\hat{\beta} = \left[ \sum_{j=1}^k Z_j \right]^{-1} \cdot \sum_{j=1}^k Z_j \cdot \hat{\beta}_j.$$

**Estimación de  $S^2 = E[\sigma^2(\phi_j)]$  :**

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^k t_j - n} \cdot \sum_{j=1}^k (X_j - Y_j \cdot \widehat{\beta}_j) \cdot v_j^{-1} \cdot (X_j - Y_j \cdot \widehat{\beta}_j).$$

**Estimación de  $\Gamma = Cov[\beta(\phi_j)]$  :**

$$\widehat{\Gamma} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^k Z_j \cdot (\widehat{\beta}_j - \widehat{\beta}_z) \cdot (\widehat{\beta}_j - \widehat{\beta}_z)'$$

Para lo cual primero se calcula:

$$\widehat{\beta}_j = (Y_j' \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j)^{-1} \cdot Y_j' \cdot v_j^{-1} \cdot Y_j.$$

Luego se calcula el escalar  $\widehat{S}^2$  y para los demás estimadores es necesario fijar un valor inicial para el parámetro  $\Gamma$ , con lo cual se puede estimar  $Z_j$  y mediante iteraciones obtener un valor estable de  $\widehat{\Gamma}$ . Para cumplir con la hipótesis de utilizar una matriz simétrica, se reemplaza el valor de  $\widehat{\Gamma}$  por  $\frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}'}{2}$ .

Una vez obtenidos los valores necesarios, se puede calcular el estimador de credibilidad para la prima de riesgo individual mediante:

$$\widehat{\mu}_{js}(\phi_j) = \widehat{\beta}(\phi_j) \cdot Y_{js} = \left[ \widehat{\beta}'_j \cdot Z_j + \widehat{\beta}'_j \cdot [I - Z_j] \right] \cdot Y_{js}.$$

### 2.2.6. Modelos Jerárquicos

Mientras Hachemeister presentaba su modelo de Regresión, Jewell mostraba otra generalización del modelo de Bühlmann-Straub, esta vez basándose en una jerarquización de la información. Jewell [23] asume que cada cartera puede estar dividida en un cierto número de subcarteras, donde cada una de ellas está caracterizada por un parámetro de riesgo desconocido que describe como una subcartera difiere de las otras. Esta metodología se resume como un modelo jerárquico con parámetros aleatorios a dos niveles: en el nivel de las pólizas y en el nivel de las subcarteras.

La interpretación práctica de este modelo se torna muy clara, por ejemplo al referirnos a una compañía de seguros en la cual cada riesgo individual es una póliza de seguro individual, y el colectivo es la cartera de coberturas similares dentro de dicha compañía. Es claro que las carteras pueden variar de una compañía a otra, y una de esas carteras puede ser mejor o peor que la media nacional. El conjunto de colectivos corresponde a la unión de todos los posibles contratos de riesgo de este tipo en la nación, es decir, está formado por los colectivos o carteras parecidas de todas las compañías del país, para las cuales, como propone Jewell, se puede asumir que disponemos de estadísticos adecuados.

Si bien, después de Jewell otros autores siguieron su enfoque y desarrollaron otros modelos jerárquicos, en este trabajo analizaremos la labor y aportes de Jewell.

### 2.2.6.1. Modelo Jerárquico de Jewell

El modelo jerárquico de Jewell se puede considerar una generalización del Modelo de Bühlmann-Straub, y aparece de manera simultánea al modelo de Hachemeister, pero con una visión completamente diferente.

En este modelo, se considera que la cartera existente puede ser dividida en un cierto número de subcarteras o sectores ( $p$ ), donde cada una de ellas está caracterizada por un parámetro de riesgo, que describe las diferencias existentes entre las distintas subcarteras, ya que cada una está formada por un cierto número de pólizas que han sido agrupadas por poseer determinadas características básicas comunes. Sin embargo, cada póliza posee unas características específicas que la diferencian de las demás pólizas dentro de la subcartera, y que vienen cuantificadas por otro parámetro de riesgo.

Entonces, se describirá un Modelo Jerárquico a dos niveles, donde cada póliza tiene asociados dos parámetros de riesgo, uno en el nivel pólizas y otro en el nivel de las subcarteras. Aunque el modelo permite una jerarquización de más de dos niveles.

Como en el modelo de Bühlmann-Straub, las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, pero la varianza depende del periodo considerado vía los pesos naturales.

El objetivo sigue siendo, encontrar los mejores estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales utilizando el criterio de los mínimos cuadrados, pero en este caso, estructurando la cartera en dos niveles,

su obtención está ligada a la de los estimadores de credibilidad para las primas de riesgo de cada subcartera.

#### A. Variables principales del modelo [6]:

$\phi_p$ : Es una variable nueva que se incorpora en este modelo, y corresponde al parámetro de riesgo de la subcartera  $p$ , con  $p = 1, 2, \dots, P$ , y  $P$  el número de subcarteras en que se dividió la cartera.

$\phi_{pj}$ : Es el parámetro de riesgo que describe las características de la póliza  $j$ -ésima perteneciente a la subcartera  $p$ , con  $j = 1, 2, \dots, k_p$ , siendo  $k_p$  el número de pólizas que constituyen la subcartera  $p$ . Este es el mismo parámetro de riesgo que aparece en los otros modelos.

$X_{pjs}$ : representa la experiencia de reclamaciones para la póliza  $j$ -ésima, perteneciente a la subcartera  $p$ , en el periodo  $s$ -ésimo, donde  $p = 1, 2, \dots, P$ ,  $j = 1, 2, \dots, k_p$  y  $s = 1, 2, \dots, t_{pj}$ , siendo  $t_{pj}$  el número de períodos observados para la póliza  $j$ -ésima, perteneciente a la subcartera  $p$ .

$w_{pjs}$ : Son las ponderaciones o pesos naturales de las variables observables  $X_{pjs}$ . Son números positivos conocidos.

Se identifica la **subcartera p** como:  $(\phi_p, \phi_{pj}, X_{pjs})$  y la **póliza p<sub>j</sub>** como  $(\phi_{pj}, X_{pjs})$ , una visualización mas concreta puede ser la siguiente:

Cuadro 2.2: Composición de cartera - Modelo Jerárquico de Jewell.

	Subcarteras						
	$p = 1$			$\dots$	$p = P$		
	$\phi_1$			$\dots$	$\phi_p$		
Años	$\phi_{11}$	$\phi_{12}$	$\dots$	$\dots$	$\phi_{p1}$	$\phi_{p2}$	$\dots$
1	$X_{111}(w_{111})$	$X_{121}(w_{121})$	$\dots$	$\dots$	$X_{p11}(w_{p11})$	$X_{p21}(w_{p21})$	$\dots$
2	$X_{112}(w_{112})$	$X_{122}(w_{122})$	$\dots$	$\dots$	$X_{p12}(w_{p12})$	$X_{p22}(w_{p22})$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Contratos	$c_{11}$	$c_{12}$	$\dots$	$\dots$	$c_{p1}$	$c_{p2}$	$\dots$

### B. Hipótesis del modelo [23]:

- Las subcarteras  $p = 1, 2, \dots, P$  son independientes, es decir, los riesgos  $(\phi_p, \phi_{pj}, X_{pjs})$  con  $j = 1, 2, \dots, k_p$  y  $s = 1, 2, \dots, t_{pj}$  son independientes
- Para cada  $p = 1, 2, \dots, P$  y para cada  $\phi_p$  dado, los contratos  $p_j = p_1, p_2, \dots, p_{k_p}$ , es decir, los pares  $(\phi_{pj}, X_{pjs})$ , con  $s = 1, 2, \dots, t_{pj}$  son condicionalmente independientes.
- Para cada  $p = 1, 2, \dots, P$ ;  $j = 1, 2, \dots, k_p$  y para cada  $(\phi_p, \phi_{pj})$  dado, las observaciones condicionales:  $X_{pj1} | \phi_p, \phi_{pj}$ ;  $X_{pj2} | \phi_p, \phi_{pj}$ ;  $\dots$   $X_{pjt_{pj}} | \phi_p, \phi_{pj}$  son independientes.
- Todos los pares de variables  $(\phi_p, \phi_{pj})$ , con  $p = 1, 2, \dots, P$  y



$j = 1, 2, \dots, k_p$  son idénticamente distribuidos.

■ Para todo  $p, j$ , y  $s$ :

a)  $E[X_{pjs} | \phi_p, \phi_{pj}] = \mu(\phi_p, \phi_{pj})$ .

b)  $Var[X_{pjs} | \phi_p, \phi_{pj}] = \frac{1}{w_{pjs}} \cdot \sigma(\phi_p, \phi_{pj})$ .

Se puede observar que  $\mu(\phi_p, \phi_{pj})$  y  $\sigma^2(\phi_p, \phi_{pj})$  no dependen de los subíndices  $p, s$ , y  $j$ .

Al igual que en el Modelo de Bühlmann-Straub, en este modelo las observaciones son homogéneas en el tiempo, pero la varianza depende del periodo de estudio, por medio de pesos naturales.

Finalmente se define el valor esperado para todos los elementos de la subcartera  $p$  en el tiempo como:

$$\mu(\phi_p) = E[\mu(\phi_p, \phi_p) | \phi_p] = E[X_{pjs} | \phi_p].$$

### C. Notación previa [23]:

Para la obtención de los estimadores de credibilidad lineales para las primas de pólizas  $\mu(\phi_p, \phi_{pj})$  y subcarteras,  $\mu(\phi_p)$ , se definen previamente los siguientes parámetros:

■ Valor esperado de las tarifas de las pólizas de la subcartera  $p$ , con  $p = 1, 2, \dots, P$ :

$$m_p = \mu(\phi_p) = E[\mu(\phi_p, \phi_{pj}) | \phi_p] = E[X_{pjs} | \phi_p].$$

- Esperanza conjunta para la cartera total:

$$m = E[\mu(\phi_p)] = E[\mu(\phi_p, \phi_{pj})] = E[X_{pjs}].$$

- Heterogeneidad esperada en el tiempo para la experiencia en reclamaciones:

$$S^2 = E[\sigma^2(\phi_p, \phi_{pj})].$$

- Grado de variabilidad esperado dentro de las subcarteras:

$$a = E[Var[\mu(\phi_p, \phi_{pj})|\phi_p]].$$

- Heterogeneidad entre las distintas subcarteras:

$$b = Var[\mu(\phi_p)].$$

▪

$$w_p = \sum_{j=1}^{k_p} w_{pj} = \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{s=1}^{t_{pj}} w_{pjs}.$$

- $Z_{pj}$ : Factor de credibilidad a nivel de contratos, con  $p = 1, 2, \dots, P$  y  $j = 1, 2, \dots, K_p$

$$Z_{pj} = \frac{a \cdot w_{pj}}{S^2 + a \cdot w_{pj}}.$$

- $Z_p$ : Factor de credibilidad a nivel de subcarpetas, con  $p = 1, 2, \dots, P$

$$Z_p = \frac{b \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p} \quad \text{con,} \quad Z_p = \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj}.$$

■

$$X_{pjw} = \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs} \cdot X_{pjs}}{w_{pj}}.$$

■

$$X_{pzw} = \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj} \cdot X_{pjw}}{Z_p}.$$

■

$$X_{zzw} = \sum_{p=1}^P \frac{Z_p \cdot X_{pzw}}{Z} \quad \text{con,} \quad Z = \sum_{p=1}^P Z_p.$$

Hay que señalar que las medias utilizadas como ponderaciones naturales en el cálculo, tanto de subcarteras como cartera, serán los factores de credibilidad acumulados en lugar de los pesos naturales  $w_{pjs}$ .

Ahora bien, con base en las hipótesis del modelo se obtienen las siguientes covarianzas:

■

$$Cov[\mu(\phi_p, \phi_{pj}), X_{qis}] = \delta_{pq}(\delta_{ij} \cdot a + b).$$

■

$$Cov[\mu(\phi_p), X_{qjw}] = \delta_{pq} \cdot b.$$

■

$$Cov[X_{pjs}, X_{pjs'}] = \frac{\delta_{ss'} \cdot S^2}{w_{pjs}} + a + b.$$

■

$$Cov[X_{pjs}, X_{pj's}] = \delta_{jj'} \cdot \left[ \frac{\delta_{ss'} \cdot S^2}{w_{pjs}} + a \right] + b.$$

■

$$Cov[X_{pjs}, X_{qj's'}] = 0 \quad p \neq q.$$

■

$$Cov[X_{pjs}, X_{pj'w}] = Cov[X_{pjw}, X_{pj'w}] = b + \delta_{jj'} \cdot \frac{a}{Z_{pj}}.$$

■

$$Cov[X_{pjw}, X_{pzw}] = Cov[X_{pzw}, X_{pzw}] = \frac{b}{Z_p} = b + \frac{a}{Z_p}.$$

■

$$Cov[X_{pzw}, X_{zzw}] = Cov[X_{zzw}, X_{zzw}] = \frac{b}{Z}.$$

#### D. Prima de riesgo individual.

Como este es un modelo jerárquico, para determinar los estimadores de credibilidad se analiza una póliza concreta  $p_j$  y se aplica el procedimiento de mínimos cuadrados dentro de la clase restringida de primas lineales.

Para iniciar el análisis de un sistema jerárquico a dos niveles, se considera la póliza  $p_j$  como parte de una subcartera  $p$ , de manera que para obtener el estimador de credibilidad para  $\mu(\phi_p, \phi_{p_j})$ , restringiendo su pertenencia a la subcartera de la cual forma parte, lo cual se logra resolviendo la siguiente ecuación:

$$\text{mín } E \left[ \left[ \mu(\phi_p, \phi_{pj}) - c_0 - \sum_{i=1}^{k_p} \sum_{s=1}^{t_{pi}} c_{pis} \cdot X_{pis} \right]^2 \middle| \phi_p \right] \quad (2.80)$$

Aplicando el modelo de Bühlmann-Straub, pero restringido a la subcartera  $p$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu^*(\phi_p, \phi_{pj}) &= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot E[\mu(\phi_p, \phi_p) | \phi_p] \\ &= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \mu(\phi_p) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Los componentes de (2.81) se encuentran en la sección **C**.

Para obtener el estimador ajustado de credibilidad lineal, para  $\mu(\phi_p)$  se utiliza toda la información relativa a las demás subcarteras, pues la subcartera seleccionada para el estudio pertenece a una cartera dada. Por lo que para resolver el problema debemos encontrar:

$$\text{mín } E \left[ \left[ \mu(\phi_p) - c_0 - \sum_{q=1}^P \sum_{j=1}^{k_q} \sum_{s=1}^{t_{qj}} c_{qjs} \cdot X_{qjs} \right]^2 \right] \quad (2.82)$$

Derivando parcialmente respecto a  $c_0$  e igualando a cero, se tiene:

$$\begin{aligned} c_0 &= E[\mu(\phi_p)] - \sum_{q,j,s} c_{qjs} \cdot E[X_{qjs}] \\ &= m - \sum_{q,j,s} c_{qjs} \cdot m. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Sustituyendo la ecuación (2.83) en (2.82) se llega a:

$$\min_{c_{q,j,s}} E \left[ [\mu(\phi_p) - E[\mu(\phi_p)] + \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot E[X_{qjs}] - \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot X_{qjs}]^2 \right] \quad (2.84)$$

derivando parcialmente respecto a  $c_{q'j's'}$  e igualando a cero, obtenemos:

$$E \left[ \left[ \mu(\phi_p) - E[\mu(\phi_p)] - \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot (X_{qjs} - E[X_{qjs}]) \right] \cdot X_{q'j's'} \right] = 0$$

es decir,

$$E [[\mu(\phi_p) - E[\mu(\phi_p)]] \cdot X_{q'j's'}] = \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot [E[[X_{qjs} - E[X_{qjs}]] \cdot X_{q'j's'}]] \quad (2.85)$$

Aplicando la relación de covarianza [20] se obtiene:

$$\begin{aligned} Cov[\mu(\phi_p), X_{q'j's'}] &= \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot Cov[X_{qjs}, X_{q'j's'}] \\ \text{entonces, } \delta_{pq'} \cdot b &= \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot \delta_{qq'} \cdot \left[ \delta_{jj'} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qjs}} + a \right] + b \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

con,  $q' = 1, 2, \dots, P$ ;  $j' = 1, 2, \dots, K_{q'}$ ;  $s' = 1, 2, \dots, t_{q'j'}$ .

Si en el sistema (2.86), con tantas ecuaciones como incógnitas,  $c_{qjs}$ , se estudia el caso  $p \neq q$  resulta:

$$0 = \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot \delta_{qq'} \cdot \left[ \delta_{jj'} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qjs}} + a \right] + b \right] \quad (2.87)$$

con,  $q' = \{1, 2, \dots, P\} - \{p\}$ ;  $j' = 1, 2, \dots, K_{q'}$ ;  $s' = 1, 2, \dots, t_{q'j'}$ .

Por tratarse (2.87) de un sistema de ecuaciones homogéneo y por las hipótesis de este modelos resulta que todas las ecuaciones son independientes, lo cual implica que el rango de la matriz asociada al sistema sea igual al número de incógnitas. Es decir, tiene solución trivial y se obtiene que todos los coeficientes  $c_{q'j's'}$  son iguales a cero para  $q' = \{1, 2, \dots, P\} - \{p\}$ .

Ahora bien, al estudiar el caso  $p = q'$  para  $j' = 1, 2, \dots, K_p$ ;  $s' = 1, 2, \dots, t_{pj'}$  se llega a:

$$\begin{aligned} b &= \sum_{qjs} c_{qjs} \cdot \delta_{qp} \cdot \left[ \delta_{jj'} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qjs}} + a \right] + b \right] \\ &= \sum_{js} c_{pjs} \cdot \left[ b + \delta_{jj'} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qjs}} + a \right] \right] \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{js} c_{pjs} \cdot b + \sum_{js} c_{pjs} \cdot \delta_{jj'} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qjs}} + a \right] \\ &= \sum_{js} c_{pjs} \cdot b + \sum_{s=1}^{t_{pj'}} c_{pj's} \cdot \left[ \delta_{ss'} \cdot \frac{S^2}{w_{qj's}} + a \right] \\ &= \sum_{js} c_{pjs} \cdot b + \sum_{s=1}^{t_{pj'}} c_{pj's} \cdot a + \frac{c_{pj's'}}{w_{pj's'}} \cdot S^2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Despejando la ecuación anterior, se tiene:

$$b = c_{p..} \cdot b + a \cdot c_{pj'}. + S^2 \cdot \frac{c_{pj's'}}{w_{pj's'}}. \quad (2.90)$$





Con esta relación de proporcionalidad, el sistema de ecuaciones (2.90) se reduce a un sistema de  $k_p$  ecuaciones con  $k_p$  incógnitas, estas últimas redefinidas como:  $c_{p1}, c_{p2}, \dots, c_{pk_p}$ . Mismo que se logra al sustituir (2.92) en (2.91), obteniendo:

$$\frac{c_{pj's}}{w_{pj's}} = \frac{c_{pj'}}{w_{pj'}} \Rightarrow c_{pj's} = \frac{c_{pj'} \cdot w_{pj's}}{w_{pj'}}. \quad (2.93)$$

Al utilizar (2.93) en (2.91) queda reducido a una sola ecuación y si además en ella se sustituye  $c_{pj's}$  por su valor, se obtiene:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot c_p + a \cdot c_{pj'} + S^2 \cdot \frac{c_{pj'}}{w_{pj'}} \\ &= b \cdot c_p + \left[ a + \frac{S^2}{w_{pj'}} \right] \cdot c_{pj'} \\ &= b \cdot c_p + a \cdot \frac{c_{pj'}}{Z_{pj'}}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Este sistema es simétrico respecto a  $\frac{c_{pj'}}{Z_{pj'}}$ , por lo tanto

$$\frac{c_{pj'}}{Z_{pj'}} = R = \text{CONSTANTE} \quad \text{para } j' = 1, 2, \dots, k_p \quad (2.95)$$

Esta constante que se puede determinar al despejar:

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot c_p + a \cdot R = a \cdot R + b \cdot R \cdot \sum_{j'=1}^{k_p} Z_{pj'} \\
&= R \cdot (a + b \cdot Z_p) \\
\text{luego, } R &= \frac{b}{a + b \cdot Z_p}. \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (2.95), para  $j' = 1, 2, \dots, k_p$  se tiene:

$$c_{pj'} = R \cdot Z_{pj'} = \frac{b \cdot Z_{pj'}}{a + b \cdot Z_p} = \frac{Z_{pj'}}{Z_p} \cdot \frac{b \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p}. \tag{2.97}$$

Al definir una nueva variable  $Z_p$  como:

$$Z_p = \frac{b \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p} \tag{2.98}$$

se transforma (2.97) en:

$$c_{pj'} = Z_p \cdot \frac{Z_{pj'}}{Z_p}. \tag{2.99}$$

Con esto, se han determinado los valores de los coeficientes  $c_{pjs}$ , para la obtención de  $c_0$  se hace por definición, con la fórmula (2.83), obteniendo:

$$c_0 = m - \sum_{q,j,s} c_{qjs} \cdot m = m - \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{s=1}^{t_{pj}} c_{pjs} \cdot m$$

con los resultados de (2.93) y (2.99)

$$\begin{aligned} &= m - \sum_{j=1}^{k_p} c_{pj} \cdot m = m - \sum_{j'=1}^{k_p} Z_p \cdot \frac{Z_{pj'}}{Z_p} \cdot m \\ &= m - Z_p \cdot m \cdot \sum_{j'=1}^{k_p} \frac{Z_{pj'}}{Z_p} = m - Z_p \cdot m \end{aligned}$$

$$\text{entonces, } c_0 = [1 - Z_p] \cdot m. \quad (2.100)$$

Además, como todos los coeficientes  $c_{qjs} = 0$  para  $q = \{1, 2, \dots, P\} - \{p\}$  y  $\forall j, s$ , se obtiene como **estimador ajustado de credibilidad para la subcartera p**:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\phi_p)} &= c_0 + \sum_{q=1}^p \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{s=1}^{t_{qj}} c_{qjs} \cdot X_{qjs} \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{s=1}^{t_{pj}} c_{pjs} \cdot X_{pjs} \text{ (sustituyendo (2.93))} \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^{k_p} c_{pj} \cdot X_{pjw} \text{ usando (2.97) y (2.100)} \\ &= [1 - Z_p] \cdot m + Z_p \cdot \sum_{j=1}^k \frac{Z_{pj} \cdot X_{pjw}}{Z_p}, \end{aligned}$$

$$\text{entonces, } \widehat{\mu(\phi_p)} = [1 - Z_p] \cdot m + Z_p \cdot X_{pzw}, \quad (2.101)$$

con todos sus factores explicados en la sección B.

Para la obtención del estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo individual  $p_j$ , se utiliza el estimador para  $\mu(\phi_p)$  en la ecuación (2.81) y el resultado es:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})} &= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot [1 - Z_p] \cdot m + z_p \cdot X_{pzw} \\ &= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \left[ \frac{a \cdot m + b \cdot Z_p \cdot X_{pzw}}{a + b \cdot Z_p} \right]\end{aligned}$$

Despejando  $X_{pzw}$  se obtiene:

$$Z_p \cdot X_{pzw} = \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot X_{pjw}.$$

Convirtiendo el estimador en:

$$\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})} = Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \left[ \frac{a \cdot m + b \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot X_{pjw}}{a + b \cdot Z_p} \right]. \quad (2.102)$$

Ahora es necesario verificar que  $\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})}$  es el **estimador de credibilidad lineal ajustado a la experiencia individual** con las siguientes condiciones:

a)  $E[\mu(\phi_p, \phi_{pj})] = E[\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})}]$ :

Por definición:  $E[\mu(\phi_p, \phi_{pj})] = E[X_{pjs}] = E[\mu(\phi_p)] = m$ .

Pero también se tiene:

$$E[\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})}] = Z_{pj} \cdot E[X_{pjw}] + [1 - Z_{pj}] \cdot \left[ \frac{a \cdot m + b \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot E[X_{pjw}]}{a + b \cdot Z_p} \right]$$

por definición se conoce:

$$E[X_{pjw}] = \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs} \cdot E[X_{pjs}]}{w_{pj}} = \frac{m}{w_{pj}} \cdot \sum_{s=1}^{t_{pj}} w_{pjs} = m.$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned} E[\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})}] &= Z_{pj} \cdot m + [1 - Z_{pj}] \cdot \frac{a \cdot m + b \cdot m \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p} \\ &= Z_{pj} \cdot m + [1 - Z_{pj}] \cdot m \\ &= m. \end{aligned}$$

b)  $Cov[\mu(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] = Cov[\widehat{\mu(\phi_p, \phi_{pj})}, X_{pzw}]$ :

Para esto, utilice:

$$Cov[\mu(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] = Cov \left[ \mu(\phi_p, \phi_{pj}), \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}}{w_{pj}} \cdot X_{pjs} \right].$$

por definición se obtiene:

$$\begin{aligned} Cov[\mu(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] &= \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}}{w_{pj}} \cdot b + \sum_{j=1}^{k_p} \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}}{w_{pj}} \cdot a \\ &= b + \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot a. \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} Cov[\widehat{\mu}(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] &= Z_{pj} \cdot Cov[X_{pjw}, X_{pzw}] \\ &\quad + [1 - Z_{pj}] \cdot \frac{b \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot Cov[X_{pjw}, X_{pzw}]}{a + b \cdot Z_p} \\ &= \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot b + [1 - Z_{pj}] \cdot \frac{\frac{b^2}{Z_p} \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj}}{a + b \cdot Z_p} \\ &= \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot b + [1 - Z_{pj}] \cdot \frac{\frac{b^2}{Z_p} \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p} \\ &= \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot b + [1 - Z_{pj}] \cdot \frac{b}{Z_p} \cdot \frac{b \cdot Z_p}{a + b \cdot Z_p} \\ &= \frac{Z_{pj}}{Z_p} \cdot b + [1 - Z_{pj}] \cdot b \\ &= a \cdot \frac{Z_{pj}}{Z_p} + b. \end{aligned}$$

Así se obtiene el resultado buscado:

$$Cov[\mu(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] = Cov[\widehat{\mu}(\phi_p, \phi_{pj}), X_{pzw}] = a \cdot \frac{Z_{pj}}{Z_p} + b.$$

### E. Variables estructurales:

Se proponen como estimadores insesgados en [23], los siguientes:

- $\hat{m} = N_0 = X_{zzw}$ : Esperanza conjunta de la cartera total.

$$\hat{m} = \sum_{p=1}^P \frac{Z_p \cdot X_{pzw}}{Z}.$$

- $\widehat{S}^2$ : Heterogeneidad esperada de la experiencia de reclamos en el tiempo.

$$\widehat{S}^2 = \frac{\sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{k+p} w_{pjs} \cdot [X_{pjs} - X_{pjw}]^2}{\sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{k+p} (t_{pj} - 1)} \quad \text{con } t_{pj} \geq 2.$$

- $\hat{a}$ : Heterogeneidad esperada dentro de las subcarteras.

$$\hat{a} = \frac{\sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot [X_{pjw} - X_{pzw}]^2}{\sum_{p=1}^P (k_p - 1)} \quad \text{con } k_p \geq 2.$$

- $\hat{b}$ : Heterogeneidad entre las distintas subcarteras.

$$\hat{b} = \frac{\sum_{p=1}^P Z_p \cdot [X_{pzw} - X_{zzw}]^2}{P - 1}.$$

En realidad  $\hat{a}$  es un *pseudo-estimador*, es decir, depende de  $a$  mediante los valores de  $Z_{pj}$  y  $X_{pzw}$ , por tanto para su determinación se requiere de un proceso iterativo.





---

---

## CAPÍTULO 3

---

### Marco Metodológico

La presente investigación parte del enfoque cuantitativo y básicamente se basa en una investigación no experimental. *“La investigación no experimental es una indagación empírica y sistemática en la cual el científico no tiene un control directo sobre las variables independientes porque sus manifestaciones ya han ocurrido o porque son inherentemente no manipulables. Las inferencias acerca de las relaciones entre variables se hacen, sin una intervención directa a partir de la variación concomitante de las variables dependientes e independientes”* [27].

Dentro de este tipo de investigación se utilizará la **Investigación Correlación**

**cional**, la cual busca medir el grado de relación entre dos o más variables, con el fin de estudiar si están corelacionadas. Se estudia el comportamiento de una variable respecto a la otra, a través de los estudios estadísticos, que en nuestro caso será la Teoría de Credibilidad.

El interés primordial es determinar bajo cual relación convexa entre los datos estadísticos propios de cada riesgo y los colectivos, se logrará la obtención de una prima de riesgo idónea para los grupos que conforman el colectivo, conociendo el comportamiento de una u otras variables relacionadas, que en nuestro caso serán las tarifas empíricas y montos expuestos.

Para alcanzar los objetivos propuestos se genera el presente documento con literatura que va más allá de la descripción de los conceptos, y el establecimiento de relaciones posibles entre los conceptos y variables de estudio. Este documento responderá a las causas de los eventos, centrando el interés de explicar por qué ocurren cada una de las situaciones y en qué condiciones se dan éstas.

Para finalmente, determinar las tarifas de riesgo que mejor se ajusten a la experiencia de los Riesgos Laborales.

### **3.1. Diseño de la investigación**

El estudio propuesto se adecuó a los propósitos de la investigación no experimental. En función de los objetivos definidos en el presente estudio, donde se aplican diferentes modelos de credibilidad a datos de Riesgos del Trabajo,

---

con el objetivo de incorporar la información del riesgo individual como del colectivo a las tarifaciones.

## **3.2. Unidad de análisis**

Para el desarrollo de esta investigación se cuenta con una muestra de las actividades de riesgo del Seguro de Riesgos del Trabajo, referente a los reclamos pagados en un periodo de 5 años y los montos expuestos al riesgo cubierto.

En función de la cláusula de confidencialidad de los datos del INS, se toma una muestra de 20 grupos de riesgo, los cuales no corresponden a ningún orden particular, ni identificación propia.

Para que la muestra sea representativa y cubra las características totales de la población estudiada, se utilizó el muestreo intencional, que a su vez pertenece al muestreo no probabilístico, donde la selección de los elementos se realiza con base en criterios o juicios del investigador. Esto con el fin de tener una muestra representativa para todos los niveles de riesgo de la cartera total en el seguro.

Para nuestro caso particular se observaron las tarifas experimentales de la cartera completa, durante un periodo de cinco años y se seleccionaron varias actividades de riesgo dentro de los posibles grupos con características homogéneas en la cartera y que contaran con la información completa en las estadísticas requeridas.

De esta manera resultó un grupo de 20 riesgos, que es la muestra que para esta investigación se utilizó en el desarrollo de los modelos contemplados para tal fin.

### **3.3. Limitaciones del proyecto**

- El alcance de esta investigación es limitado, dado que se realiza sobre una muestra de información, a fin de cumplir con la cláusula de confidencialidad solicitada por la empresa interesada, sin embargo la aplicación a la totalidad de la población en el seguro estudiado es posible.
- La implementación de tan solo cuatro modelos de credibilidad es un punto a mejorar, por cuanto se cuenta con material didáctico que permitiría el análisis de otros modelos, sin embargo la limitante del tiempo necesario para su implementación no permitió incluirlos.

### **3.4. Métodos de recolección de información**

- El material didáctico para la elaboración del marco teórico y el sustento bibliográfico de este trabajo se logró recolectar mediante consultas a libros relacionados con los diferentes temas expuestos, consultas en internet y revistas especializadas en la materia analizada.
- La información referente a reclamos y sumas aseguradas, indispensable

---

para la aplicación de los modelos aquí evaluados, fue proporcionada por el Instituto Nacional de Seguros. Con la misma se realizaron comparaciones entre períodos para determinar su razonabilidad y se determinaron los grupos que presentaron comportamientos lógicos según el riesgo representado.

- Para la elaboración del documento escrito se requirió el uso de una computadora, el texto se generó con el software denominado y para las aplicaciones se utilizó la programación de la investigadora mediante el lenguaje de Visual Basic para Excel©.



---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Aplicaciones

### 4.1. Planteamiento del Problema

Los modelos de Teoría de Credibilidad que hemos explicado ampliamente en este proyecto serán implementados sobre una muestra de actividades de riesgo del Seguro de Riesgos del Trabajo.

Por tanto, los conceptos nombrados en el marco teórico como póliza, se utilizarán en las aplicaciones a desarrollar en este capítulo como actividades o grupos de riesgos del Seguro de Riesgos del Trabajo.

Para la aplicación se usan los montos de reclamos pagados en los últimos cinco años, así como los montos respectivos de exposición al riesgo en dicho periodo, para 20 grupos de riesgo.

Cada grupo de riesgo analizado cuenta con su propia experiencia en reclamos, con lo cual se estimarán las tarifas de riesgo individual para el año  $t + 1$ . Para esta estimación, y bajo el enfoque de la Teoría de Credibilidad consideramos las siguientes circunstancias:

- I. Considerar que cada grupo de riesgo se diferencia de las demás por un único parámetro de riesgo.
- II. Considerar que la muestra de estudio está determinada por  $r$  parámetros de riesgo, uno para cada nivel en que se haya organizado el estudio de nuestra cartera. Por ejemplo, se considera que además de los grupos de riesgo, se podrán agrupar las actividades en  $k_p$  grandes grupos, con  $p = 1, 2, \dots, P$ , que determinarían un nivel de agrupación como podría ser los riesgos con baja, media o alta siniestralidad. Es decir, cada uno de estas subcarteras se caracteriza por un parámetro de riesgo que explicaría las diferencias entre ellas, pero a su vez, cada grupo de riesgo individual tendrá características propias que lo diferencia de las demás actividades del mismo subgrupo.

Para el primer escenario expuesto se aplican los dos modelos denominados clásicos y el modelo de regresión de Hachemeister, mientras que el segundo escenario es ideal para aplicar el modelo jerárquico de Jewell.

Para la aplicación correcta de los modelos, se aclaran algunos elementos im-



portantes en el desarrollo de los mismos.

- La cartera estudiada está compuesta por pólizas agrupadas en grupos de riesgo, que a su vez se pueden clasificar en  $P$  subcarteras.
- La variable aleatoria  $X_{js}$ , que en la teoría se denominó experiencia en reclamos, en las aplicaciones se referirán a las tarifas empíricas del riesgo  $j$ -ésimo en el año  $s$ -ésimo, con  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $s = 1, 2, \dots, t_j$ . Además, en el escenario donde consideramos la cartera dividida en  $P$  subcarteras, esta variable se representará con tres subíndices, es decir,  $X_{pjs}$ , siendo la tarifa empírica bajo el riesgo  $j$ -ésimo, perteneciente a la subcartera  $p$ -ésimo, en el año  $s$ -ésimo, con  $p = 1, 2, \dots, P$ ,  $j = 1, 2, \dots, k_p$  y  $s = 1, 2, \dots, t_{pj}$ .
- Finalmente los pesos naturales, requeridos para aplicar algunos de los modelos de credibilidad expuestos, serán el monto del capital total expuesto para cada riesgo en estudio, que en nuestro caso particular corresponde a las sumas aseguradas en cada actividad económica de la muestra.

Sobre las hipótesis de estos modelos, se debe suponer la independencia entre las  $P$  subcarteras y entre los riesgos, además dentro de una misma subcartera en el tiempo, así como el hecho que los parámetros de riesgo son idénticamente distribuidos.

## 4.2. Aplicación de los modelos de Credibilidad

### 4.2.1. Características de la cartera de estudio

Para la aplicación de los modelos de credibilidad expuestos en este proyecto, se consideran 20 grupos de riesgo o actividades de Riesgos del Trabajo, y se utiliza para el análisis la experiencia individual de cada grupo, en un periodo de cinco años ( $t_j = t = 5$ ), así como la información concerniente a las sumas expuestas para cada riesgo en el mismo período de estudio. Con esto, se obtiene la información referente a las variables  $X_{js}$  y  $w_{js}$ , con  $j = 1, 2, \dots, 20$  y  $s = 1, 2, \dots, 5$ .

Con el fin de poder estimar el monto de prima de riesgo a cobrar por cada riesgo en el sexto año, se consideran las tarifas empíricas para cada riesgo, en cada año de estudio. Estos datos se observan en el *Cuadro 4.2*.

Mientras que los respectivos pesos,  $w_{js}$ , dados en miles de millones de colones, se observan en el *Cuadro 4.1*.

### 4.2.2. Implementación de los modelos

El objetivo de esta aplicación es poder determinar la prima de riesgo correspondiente al sexto año, para cada uno de los riesgos o actividades económicas en estudio. Para ello se implementarán los cuatro modelos analizados y se

Cuadro 4.1: Pesos naturales por riesgo y año de estudio.

<b>j</b>	<b>s = 1</b>	<b>s = 2</b>	<b>s = 3</b>	<b>s = 4</b>	<b>s = 5</b>
<b>1</b>	193	205	230	244	246
<b>2</b>	59	57	45	54	49
<b>3</b>	29	31	30	30	22
<b>4</b>	197	211	215	220	230
<b>5</b>	21	21	22	24	23
<b>6</b>	13	14	15	15	16
<b>7</b>	49	52	54	54	56
<b>8</b>	4	5	4	4	5
<b>9</b>	126	147	112	108	108
<b>10</b>	58	60	62	63	67
<b>11</b>	8	8	8	7	7
<b>12</b>	13	15	15	15	15
<b>13</b>	14	15	15	16	17
<b>14</b>	26	30	30	31	34
<b>15</b>	122	123	121	123	117
<b>16</b>	7	10	11	10	7
<b>17</b>	2	2	2	2	2
<b>18</b>	5	5	4	4	4
<b>19</b>	2	2	2	2	2
<b>20</b>	1	1	1	1	1

Cuadro 4.2: Tarifas empíricas de la muestra.

<b>j</b>	<b>s = 1</b>	<b>s = 2</b>	<b>s = 3</b>	<b>s = 4</b>	<b>s = 5</b>
<b>1</b>	0,003	0,004	0,002	0,002	0,002
<b>2</b>	0,002	0,002	0,003	0,002	0,002
<b>3</b>	0,007	0,006	0,005	0,004	0,006
<b>4</b>	0,007	0,007	0,006	0,006	0,006
<b>5</b>	0,008	0,007	0,008	0,006	0,006
<b>6</b>	0,014	0,006	0,006	0,006	0,006
<b>7</b>	0,008	0,009	0,009	0,008	0,008
<b>8</b>	0,009	0,008	0,009	0,012	0,009
<b>9</b>	0,009	0,009	0,011	0,010	0,008
<b>10</b>	0,012	0,011	0,010	0,010	0,007
<b>11</b>	0,018	0,010	0,008	0,009	0,008
<b>12</b>	0,012	0,013	0,011	0,010	0,007
<b>13</b>	0,015	0,020	0,019	0,017	0,012
<b>14</b>	0,023	0,018	0,020	0,019	0,014
<b>15</b>	0,020	0,019	0,018	0,019	0,017
<b>16</b>	0,021	0,019	0,020	0,019	0,024
<b>17</b>	0,029	0,025	0,019	0,021	0,022
<b>18</b>	0,027	0,023	0,021	0,026	0,020
<b>19</b>	0,031	0,027	0,023	0,031	0,023
<b>20</b>	0,042	0,038	0,026	0,032	0,039

determinará con cuál de ellos se obtiene una tarifa de riesgo que se adecúe al comportamiento de siniestralidad propio y logre estimar una tarifa suficiente para reclamos futuros.

Como primer escenario se considera que cada grupo de estudio tiene asociado un único riesgo, que precisamente lo caracteriza y a su vez lo diferencia de los demás grupos que integran la cartera de estudio. Además se asume la existencia de independencia entre los grupos y dentro de un mismo grupo en el tiempo, así como que los parámetros de riesgo son idénticamente distribuidos.

Bajo estas hipótesis y las que se asuman respecto a la matriz de covarianzas, se aplicará un modelo credibilístico u otro, entre los primeros tres expuestos, es decir, el modelo de Bühlmann, Bühlmann-Straub y el modelo de Regresión de Hachemeister.

Por otra parte, un segundo escenario para el cálculo de las tarifas de riesgo individuales consiste en clasificar las observaciones en  $P$  subcarteras, por ejemplo con base en la siniestralidad presentada. Con este enfoque, cada grupo de estudio tendría asociado dos parámetros de riesgo, uno que lo caracteriza como riesgo individual y otro que los agrupa en niveles de siniestralidad, es decir, en conjuntos de observaciones que presentan alta, media o baja siniestralidad. Para este tipo de análisis se utilizará el Modelo de Jewell.

Los resultados numéricos en la aplicación de los cuatro modelos de credibilidad expuestos, se han obtenido mediante funciones programadas en Visual Basic para Excel.

#### 4.2.2.1. Aplicación del Modelo de Bühlmann

Mientras se mantengan las hipótesis de los modelos en los periodos siguientes, y según el planteamiento de Bühlmann, la mejor aproximación lineal para  $E[X_{j,t+1}|X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jt}]$  coincidirá con la mejor aproximación lineal obtenida para la prima de riesgo individual,  $E[\mu(\phi_j)|X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jt}]$ .

De esta manera, aplicando la función que se ha programado para dicho modelo, solo se necesitan las observaciones de la muestra, indicadas en el *Cuadro 4.2*, de este capítulo, ya que el modelo de Bühlmann no utiliza los pesos naturales en sus estimaciones.

Los estimadores de credibilidad y variables estructurales que obtenemos de la aplicación de este modelo son los que se detallan en el *Cuadro 4.3*.

Para este modelo obtenemos las variables estructurales:

- $\mathbf{Z}=0,979380935$
- $\mathbf{m}=0,013675208$
- $S^2=0,000008172$
- $\mathbf{a}=0,000077636$

Como se observa, el factor de credibilidad,  $Z$ , en este modelo es alto, y único para toda la cartera.

Entre las propiedades que este factor presenta está el que tiende a 1 entre mayor sea la cantidad de periodos observados, y aunque en este caso

Cuadro 4.3: Estimadores de Credibilidad. Modelo Bühlmann

<b>Grupo riesgo</b>	<b>Estimador Individual</b>	<b>Estimador Credibilidad</b>
<b>1</b>	0,00235	0,00259
<b>2</b>	0,00251	0,00274
<b>3</b>	0,00567	0,00584
<b>4</b>	0,00644	0,00659
<b>5</b>	0,00695	0,00709
<b>6</b>	0,00772	0,00784
<b>7</b>	0,00816	0,00827
<b>8</b>	0,00922	0,00931
<b>9</b>	0,00937	0,00946
<b>10</b>	0,00989	0,00997
<b>11</b>	0,01049	0,01056
<b>12</b>	0,01059	0,01066
<b>13</b>	0,01670	0,01664
<b>14</b>	0,01877	0,01866
<b>15</b>	0,01870	0,01859
<b>16</b>	0,02061	0,02047
<b>17</b>	0,02327	0,02307
<b>18</b>	0,02352	0,02332
<b>19</b>	0,02708	0,02680
<b>20</b>	0,03550	0,03505

particular no es la razón del resultado, pues solo se tienen 5 periodos de observación, si se puede determinar que dicho resultado es consistente, al darle mayor importancia al estimador individual que al colectivo, pues la dispersión presentada entre las primas de riesgo individuales ( $\hat{a}$ ) es superior a la existente entre los reclamos en el tiempo para toda la cartera ( $\hat{S}^2$ ).

Con estos resultados en las variables estructurales, es lógico obtener estimadores ajustados de credibilidad con valores muy cercanos a sus estimadores individuales, ligeramente superiores, excepto para los últimos grupos de estudio. Esto se debe a que la hipótesis del modelo sobre heterogeneidad en la cartera no se cumple; como se constata observando la dispersión entre las 20 pólizas, donde el riesgo número 20 es 15 veces el riesgo número 1.

No obstante, debido a que colectivamente los datos son abundantes, se obtiene un alto nivel de credibilidad,  $Z = 97,5\%$ , la cual se aplica en promedio a las 20 pólizas.

Notese que en este modelo siempre se tiene, para cada contrato, la misma estimación para todos los años futuros.

#### **4.2.2.2. Aplicación del Modelo de Bühlmann-Straub**

Como se ha comentado, el modelo de Bühlmann considera que todos los riesgos tienen igual importancia dentro de la cartera, aunque no sea así en la práctica. Para este caso particular de estudio, este supuesto es insostenible y en aras de corregirlo, se considera a partir de este modelo la incorporación de pesos o ponderaciones naturales, mostradas en el *Cuadro 4.2*.



Pese a esta incorporación, se mantienen invariante las hipótesis consideradas en el modelo anterior, es decir, la independencia dentro y entre los grupos de riesgo, y que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo; pero incluyendo, que la varianza deja de ser constante para depender del periodo considerado por medio de los pesos.

Al igual que como en el modelo anterior, este modelo también utiliza para cada contrato estimadores futuros que no dependen del tiempo y son constantes.

Para la aplicación programada en Visual Basic respecto a este modelo, se utilizan una vez más los datos mostrados en el *Cuadro 4.2* y se necesitan, ahora sí, los detallados en el *Cuadro 4.1*.

Para este modelo, las variables estructurales son:

- $\mathbf{Z}=18,70870$
- $\mathbf{m}=0,01297$
- $S^2=298.727$
- $\mathbf{a}=0.000037524$

Como se ha enfatizado en el marco teórico, en este modelo el factor de credibilidad no es único para toda la cartera, más bien existe un factor para cada grupo en estudio y mediante los cuales se pueden notar los siguientes comportamientos:

- Los primeros 12 grupos de riesgo, presentan no solo un alto factor de

Cuadro 4.4: Estimadores de Credibilidad. Modelo Bühlmann-Straub.

<b>Grupo riesgo</b>	<b>Estimador Individual</b>	<b>Estimador Credibilidad</b>	<b>Factor Credibilidad</b>
<b>1</b>	0,00230	0,00232	0,99763
<b>2</b>	0,00248	0,00259	0,99003
<b>3</b>	0,00565	0,00579	0,98164
<b>4</b>	0,00641	0,00643	0,99753
<b>5</b>	0,00692	0,00706	0,97665
<b>6</b>	0,00756	0,00775	0,96431
<b>7</b>	0,00815	0,00820	0,99011
<b>8</b>	0,00920	0,00960	0,89292
<b>9</b>	0,00933	0,00934	0,99561
<b>10</b>	0,00981	0,00983	0,99149
<b>11</b>	0,01052	0,01068	0,93525
<b>12</b>	0,01052	0,01061	0,96488
<b>13</b>	0,01658	0,01646	0,96661
<b>14</b>	0,01855	0,01845	0,98259
<b>15</b>	0,01872	0,01869	0,99564
<b>16</b>	0,02033	0,01992	0,94365
<b>17</b>	0,02334	0,02128	0,80114
<b>18</b>	0,02364	0,02252	0,89516
<b>19</b>	0,02688	0,02399	0,79253
<b>20</b>	0,03581	0,02789	0,65333

credibilidad, entre 0.89 y 0.99, con lo que estaríamos dando mayor peso a la experiencia individual ante la colectiva, sino que además los estimadores ajustados por credibilidad son muy cercanos a los estimadores individuales, y ligeramente superiores.

- Por su parte los grupo de riesgo entre 13° y 16° posición, si bien presentan un alto valor en sus factores de credibilidad, con lo que se le dá mayor peso a la experiencia individual, los estimadores por credibilidad son similares a los estimadores individuales, pero ligeramente inferiores a los anteriores.
- Finalmente, los últimos cuatro grupos de riesgo presentan un comportamiento mas alejado de los anteriores, pues además de tener factores de credibilidad inferiores a 0.89, la diferencia entre los estimadores individuales y los ajustados por credibilidad se hace mas notoria, siendo estos últimos por mucho inferiores a los individuales.
- El modelo de Bühlmann da el mismo peso o importancia a todas la pólizas (pesos=1), mientras que Bühlmann-Straub sí toma en cuenta la importancia de cada póliza, por ejemplo se puede observar como las pólizas 1, 4, 9 y 15 son las más importantes al contar con mayor participación, y como puede notarse los factores de credibilidad asignados por el modelo Bühlmann-Straub a estas pólizas son superiores a 99,5 %.

Con las observaciones presentadas se percibe que el asumir que cada grupo de estudio está representado por un único parámetro de riesgo no es quizás la situación real de la cartera. Por lo tanto, la aplicación de este modelo para

obtener las tarifas, no sea tal vez la decisión idónea.

Sin embargo, se aprecia la mejora en los estimadores, en comparación con el modelo de Bühlmann, ya que en Bühlmann-Straub, por ejemplo, la póliza 20, al ser poco significativa no le otorga suficiente credibilidad, siendo la más baja, con un 65 %, que a su vez ejemplifica la heterogeneidad de este grupo con la cartera general, es decir presenta una alta varianza respecto a la cartera.

#### **4.2.2.3. Aplicación del Modelo de Regresión de Hachemeister**

Los modelos anteriores suponen que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, es decir las observaciones no presentan cambios significativos según el periodo de estudio, por tanto ninguno de esos modelos permite analizar o detectar tendencias, efectos de inflación o variación en la siniestralidad.

Para lograr esto, el modelo de Hachemeister remueve el supuesto de homogeneidad en el tiempo, permitiendo así tendencias en el comportamiento de los riesgos al transcurrir el tiempo.

Para profundizar en este estudio se mostrarán los gráficos de tendencia histórica de los datos presentados en el *Cuadro 4.2*, mediante la cual parece indicar a simple vista que las observaciones por riesgo y año presentan una tendencia de tipo lineal, por lo que aplicaremos el Modelo de Hachemeister para el caso particular de  $n = 2$ .

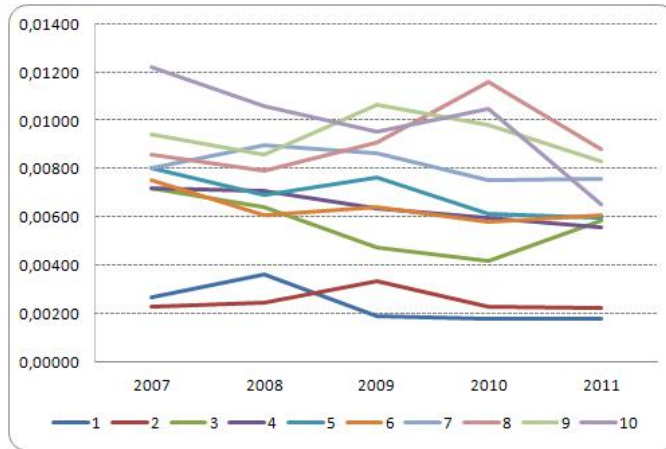


Figura 4.1: Tarifas Empíricas - Grupos 1-10.

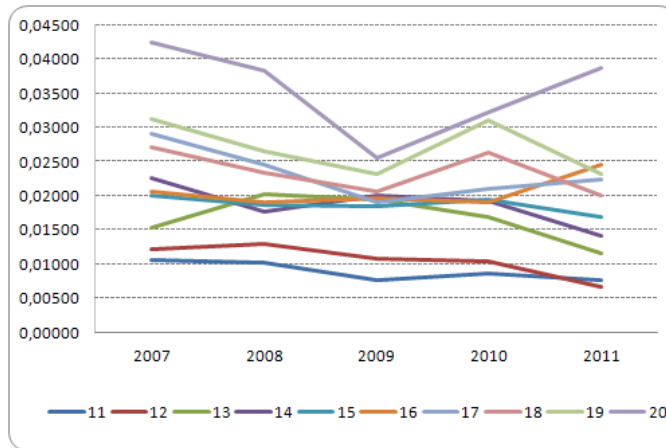


Figura 4.2: Tarifas Empíricas - Grupos 11-20.

Para reemplazar la hipótesis de homogeneidad en el tiempo por una de tipo lineal ( $n = 2$ ) y como los periodos observados para todos los riesgos son el mismo, es decir  $t_j = t = 5$ , se tiene que todas las matrices  $Y_j$  van a tener la misma dimensión, siendo por definición, la matriz  $Y$  como se muestra de seguido.

$$Y_j = Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

El objetivo es estimar la tarifa del siguiente periodo, es decir para  $s = 6$  y siendo un modelo lineal, lo que en realidad se requiere es el término de intersección de la recta lineal estimada.

Por otro lado, para calcular las matrices  $v_j$ , se asume que no existe correlación entre las tarifas para cada grupo de estudio, por tanto se tienen matrices diagonales de dimensión (5,5), definidas así:

$$v_j = \text{diag} \left( \frac{1}{w_{j1}}, \frac{1}{w_{j2}}, \frac{1}{w_{j3}}, \frac{1}{w_{j4}}, \frac{1}{w_{j5}} \right)$$

donde  $w_{js}$  son los pesos naturales mostrados en el *Cuadro 4.1*.

Los resultados de los estimadores por credibilidad para los 20 grupos de riesgo de la cartera y bajo las hipótesis expuestas, se obtienen mediante la aplicación creada para dicho fin en Visual Basic para excell, obteniendo los resultados del *Cuadro 4.5*

Como variables estructurales de este modelo se obtuvieron:

- **Estimador Colectivo**

Prima Colectiva (m): 0.011187

Pendiente: -0.000790

■ **Varianza esperada:** 171.720

Como se observa en la representación gráfica de las tarifas de riesgo proyectadas para el año 6 (Figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6), este modelo calcula una tarifa similar tanto para sus estimadores individuales (H-Exp en la gráfica del riesgo respectivo) como los ajustados por credibilidad (H-Cred en la gráfica del riesgo respectivo), a la vez que permite captar la tendencia que presentan los datos e incorporarla en la estimación a posteriori.

La mayor diferencia entre estimadores individuales y de credibilidad se puede observar en los grupos 8,16 y 20, los cuales evidentemente no presentan una tendencia lineal.

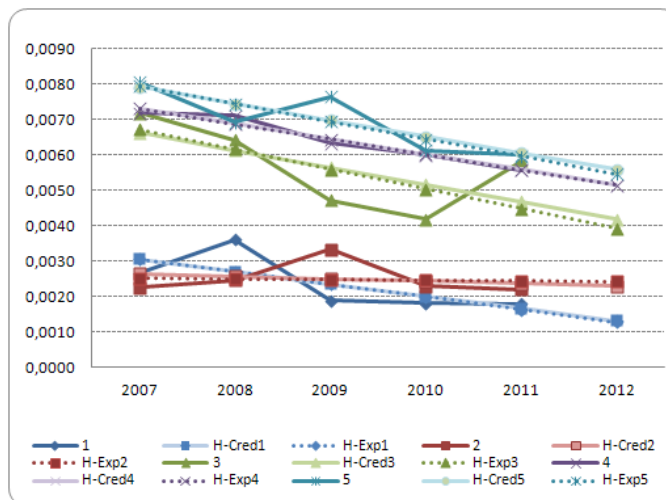


Figura 4.3: Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-1.

Estos hechos muestran que entre los modelos aplicados al momento, este es el que se ajusta mejor a la experiencia de siniestralidad de los Riesgos del

Cuadro 4.5: Estimadores de Credibilidad. Modelo de Hachemeister.

Grupo estudio	Variable de predicción	Estimador Individual	Estimador Credibilidad	Matrices de Credibilidad	
1	Intersección	0,00127	0,00130	1,008389	0,234248
	Pendiente	-0,00036	-0,00035	-0,002953	0,922473
2	Intersección	0,00242	0,00230	1,026062	0,730651
	Pendiente	-0,00002	-0,00007	-0,010121	0,738690
3	Intersección	0,00392	0,00419	1,042230	1,198353
	Pendiente	-0,00056	-0,00049	-0,016635	0,570164
4	Intersección	0,00514	0,00515	1,008450	0,235151
	Pendiente	-0,00043	-0,00043	-0,003044	0,920518
5	Intersección	0,00546	0,00558	1,047788	1,391416
	Pendiente	-0,00050	-0,00047	-0,018175	0,523971
6	Intersección	0,00301	0,00537	1,058967	1,772403
	Pendiente	-0,00156	-0,00036	-0,022728	0,400745
7	Intersección	0,00744	0,00728	1,027636	0,780619
	Pendiente	-0,00024	-0,00030	-0,010154	0,734665
8	Intersección	0,01035	0,00829	1,067813	2,516432
	Pendiente	0,00039	-0,00033	-0,032837	0,121168
9	Intersección	0,00912	0,00894	1,013748	0,378477
	Pendiente	-0,00007	-0,00012	-0,005330	0,863030
10	Intersección	0,00641	0,00680	1,024482	0,690508
	Pendiente	-0,00116	-0,00103	-0,008939	0,766254
11	Intersección	0,00372	0,00731	1,066807	2,151440
	Pendiente	-0,00223	-0,00059	-0,029327	0,230769
12	Intersección	0,00649	0,00778	1,059061	1,768097
	Pendiente	-0,00138	-0,00096	-0,022826	0,399173
13	Intersección	0,01309	0,01360	1,057208	1,711242
	Pendiente	-0,00120	-0,00102	-0,021919	0,422235
14	Intersección	0,01403	0,01466	1,041239	1,189114
	Pendiente	-0,00156	-0,00134	-0,015113	0,602529
15	Intersección	0,01707	0,01692	1,013929	0,386682
	Pendiente	-0,00055	-0,00059	-0,005188	0,865429
16	Intersección	0,02250	0,01878	1,070504	2,199262
	Pendiente	0,00072	-0,00045	-0,029232	0,231792
17	Intersección	0,01816	0,01918	1,045073	2,660812
	Pendiente	-0,00170	-0,00118	-0,036236	0,011831
18	Intersección	0,01990	0,01972	1,064029	2,348332
	Pendiente	-0,00118	-0,00115	-0,033489	0,119959
19	Intersección	0,02373	0,02251	1,048000	2,899663
	Pendiente	-0,00112	-0,00124	-0,035801	0,000639
20	Intersección	0,02965	0,02807	0,982254	2,476167
	Pendiente	-0,00190	-0,00159	-0,036721	-0,043248



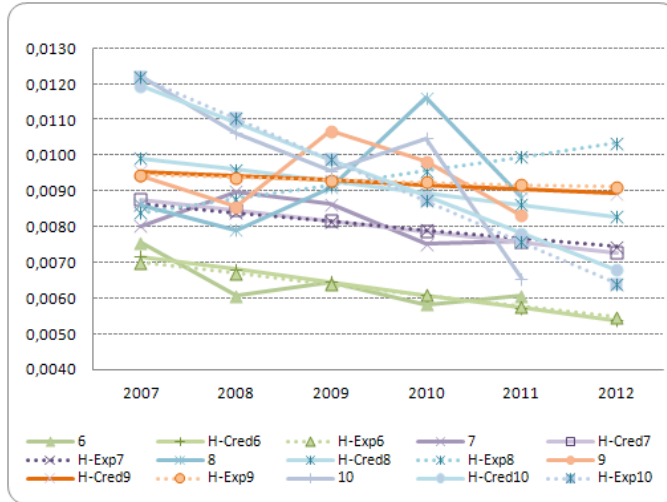


Figura 4.4: Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-2.

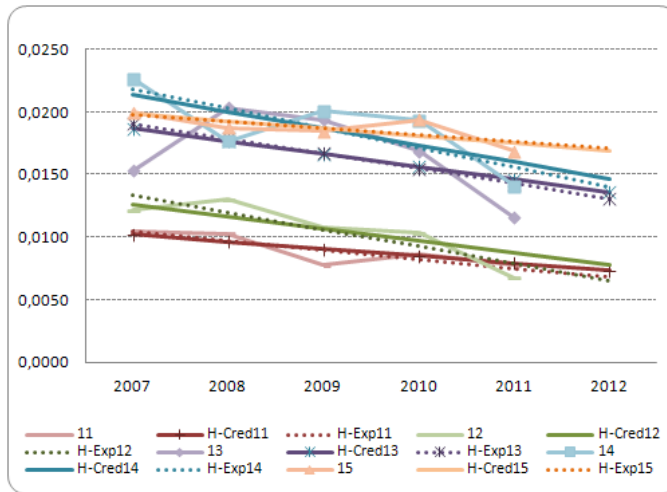


Figura 4.5: Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-3.

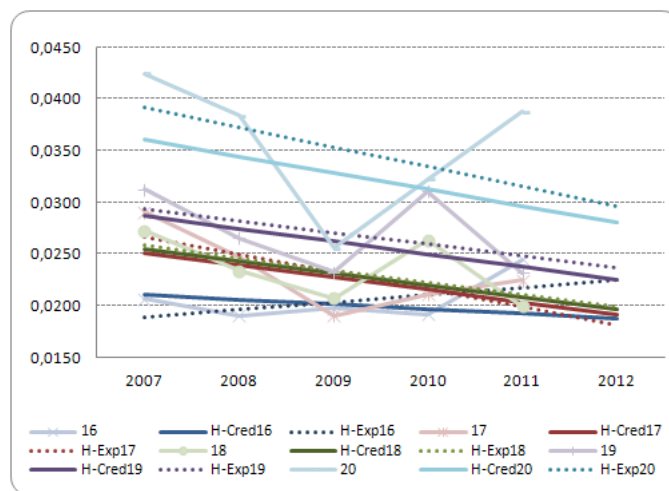


Figura 4.6: Estimadores Individuales y de Credibilidad - Hachemeister-4.

Trabajo.

Sin embargo, al analizar detenidamente los factores de credibilidad mediante los cuales los riesgos individuales participan en el cálculo de la tarifa colectiva de esta cartera, se pueden identificar tres grupos bien diferenciados, y dentro de cada uno de ellos el comportamiento de las pólizas parece homogéneo. Por lo tanto se debe considerar un estudio a la cartera donde se pueda dividir la misma en tres subcarteras, formada la primera de ellas por los dos primeros grupo de estudio, la segunda por los siguientes 10 grupos y la tercera por los últimos 8 grupos, para esta comparación se aplica el modelo de Jewell, que precisamente permite este tipo de separación de carteras.

#### 4.2.2.4. Aplicación del Modelo Jerárquico de Jewell

Como se indicó con el modelo de Hachemeister, la identificación de un agrupamiento particular entre los riesgos analizados con las técnicas anteriores, supone que la cartera de estudio debe ser dividida en 3 subgrupos que represente mejor los riesgos estudiados. Este reagrupamiento, hace suponer que la hipótesis que se ha asumido desde el inicio, de que los grupos de estudio están caracterizados por un sólo parámetro de riesgo, no refleja la situación real de la cartera y que se debe cambiar, pues los 20 riesgos estudiados no son homogéneos entre sí.

Por lo tanto en esta aplicación se considera que la cartera se encuentra dividida en 3 subcarteras (clasificación insinuada no sólo en el modelo de Regresión de Hachemeister, sino también en el de Bühlmann-Straub), de manera que cada grupo de estudio tiene asociados dos parámetros de riesgo, uno a nivel de cartera y otro a nivel subgrupo.

Para realizar esta aplicación también se programó en Visual Basic para Excel las funciones necesarias para los cálculos y resultados que se muestran más adelante. La aplicación considera que los periodos observados son los mismos para todos los grupos de estudio y que el número de subcarteras puede ser desde 2, hasta 6, identificando además cuales observaciones corresponden a cada subcartera.

Para su uso requerimos los datos de los *cuadros 4.1 y 4.2*, que corresponden a los pesos naturales y las tarifas empíricas respectivamente; para los 20 grupos y un periodo de observación de 5 años.

Por lo tanto, los resultados obtenidos bajo la agrupación de riesgos representada por los factores de credibilidad en el modelo de Hachemeister se puede observar en el *Cuadro 4.6* y de forma adicional se generó otro escenario que también clasifica los riesgos en tres grandes grupos, pero en un orden distinto al identificado con el modelo de Hachemeister, los detalles de este se presentan en el *Cuadro 4.7*

Las variables estructurales del *Cuadro 4.6* son:

- $Z=2,9173899$
- $m=0,01089934$
- $S^2=254.080$
- $a=0,00001130$
- $b=0,00009746$

Por su parte las variables estructurales del *Cuadro 4.7*

- $Z=2,63684338$
- $m=0,01466087$
- $S^2=254.080$
- $a=0,00004301$
- $b=0,00004850$

El principal logro de esta aplicación es el constatar que al clasificar esta

Cuadro 4.6: Estimadores de Credibilidad. Modelo de Jewell - 3 Subcarteras.

<b>Sub cartera</b>	<b>Grupo estudio</b>	<b>Estimador Individual</b>	<b>Estimador Credibilidad</b>	<b>Factor Credibilidad</b>
1	1	0,002298	0,002298	0,995605
	2	0,002484	0,002482	0,981616
	3	0,005654	0,005737	0,966377
2	4	0,006414	0,006421	0,995422
	5	0,006923	0,006974	0,957417
	6	0,006364	0,006477	0,935590
	7	0,008148	0,008148	0,981756
	8	0,009199	0,009001	0,817607
	9	0,009328	0,009318	0,991859
	10	0,009807	0,009780	0,984287
	11	0,009014	0,008912	0,885906
	12	0,010524	0,010371	0,936595
	3	13	0,016576	0,016897
14		0,018547	0,018654	0,968093
15		0,018715	0,018741	0,991914
16		0,020331	0,020487	0,900029
17		0,023344	0,022885	0,684125
18		0,023637	0,023325	0,821109
19		0,026878	0,025244	0,672510
20		0,035806	0,028894	0,503262

Cuadro 4.7: Estimadores de Credibilidad. Modelo de Jewell - 3 Subcarteras.

<b>Sub- cartera</b>	<b>Grupo estudio</b>	<b>Estimador Individual</b>	<b>Estimador Credibilidad</b>	<b>Factor Credibilidad</b>
1	1	0,002298	0,002309	0,998383
1	2	0,002484	0,002527	0,993175
1	3	0,005654	0,005694	0,987396
1	4	0,006414	0,006418	0,998315
1	5	0,006923	0,006954	0,983943
2	6	0,006364	0,006516	0,975363
1	7	0,008148	0,008153	0,993228
3	8	0,009199	0,010257	0,924344
1	9	0,009328	0,009327	0,996998
1	10	0,009807	0,009801	0,994177
2	11	0,009014	0,009174	0,954880
2	12	0,010524	0,010573	0,975764
2	13	0,016576	0,016484	0,976965
1	14	0,018547	0,018431	0,988052
1	15	0,018715	0,018686	0,997018
2	16	0,020331	0,020027	0,960842
3	17	0,023344	0,023321	0,855135
3	18	0,023637	0,023604	0,925982
3	19	0,026878	0,026319	0,848415
3	20	0,035806	0,032452	0,734137

cartera en subgrupos mas pequeños se logra darle mayor credibilidad a la información individual con que se cuenta para la estimación de tarifas de riesgo, como se puede observar en el *Cuadro 4.7*, donde los factores de credibilidad son relativamente altos, a excepción de los últimos 4 grupos. Sin embargo, un reordenamiento en la clasificación de las pólizas para el análisis respectivo resulta en una mejoría notoria, por ejemplo, en el grupo 20 donde se pasó de un factor de credibilidad de 50 % a uno de 73 % en el segundo escenario de este modelo.

Otro aspecto a destacar, es que los estimadores de credibilidad también se asemejan a los estimadores individuales propuestos por el modelo.

Para determinar entre los escenarios propuestos con el modelo de Jewell, ¿cual se ajusta mejor a las tarifas empíricas?, se comprueba que es el mostrado en el *Cuadro 4.7*, ya que no sólo se logra mejorar el uso de la información individual de riesgo, sino que a nivel de cartera presenta menor varianza (**b**), es decir, bajo el segundo esquema de agrupamiento, la heterogeneidad entre las subcarteras es menor que en el primer esquema propuesto.





---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Conclusiones

El objetivo de este capítulo es ofrecer una síntesis de los logros alcanzados con este proyecto, para lo cual se hace referencia a los capítulos 3 y 4.

Cabe resaltar que el principal logro de este proyecto fue la investigación realizada, y por ende la calidad de conocimiento adquirido respecto a los modelos de credibilidad desarrollados. Además, la inherente necesidad de continuar la búsqueda y análisis de modelos más complejos, que permitan la implementación de técnicas actuariales aún no aplicadas en el campo de los seguros en Costa Rica.

En el capítulo 4 se desarrolló la aplicación de la Teoría de Credibilidad en datos estadísticos de 5 años de Riesgos del Trabajo, con el fin de estimar la tarifa de riesgo para cada uno de los 20 grupos de estudio.

Los cálculos se pudieron realizar al contar con la información pertinente para la implementación de los modelos considerados, es decir, con la experiencia propia de cada grupo de riesgo, con lo cual se logró calcular las tarifas de riesgo empíricas, punto de partida para todos los cálculos realizados.

Los modelos de credibilidad que se consideraron para las aplicaciones fueron: el modelo de Bühlmann, el modelo de Bühlmann-Straub, el modelo de Regresión de Hachemeister y el modelo Jerárquico de Jewell.

Para la implementación de estos modelos, se confeccionó una aplicación en Visual Basic para Excel, que permite la estimación de las tarifas de credibilidad.

El primer modelo implementado fue el **Modelo de Bühlmann**, sin embargo este modelo considera que todos los grupos en estudio tienen la misma importancia en la cartera y que la matriz de covarianzas es homogénea en el tiempo. Estos supuestos no son aceptables para el caso analizado, no sólo porque el volumen de asegurados es determinante en la tarificación del seguro, sino porque los datos originales muestran una tendencia lineal, en la mayoría de ellos.

El segundo modelo utilizado para la determinación de la tarifa de credibilidad individual para el año 6, fue el **Modelo de Bühlmann-Straub**, pues al incorporar en el cálculo los pesos o ponderaciones naturales, considera la

importancia que tiene el tamaño de cada póliza o grupo de riesgo en la cartera total.

Esto permite determinar factores de credibilidad para cada grupo de estudio y por ende una tarifa individual más ajustada a la realidad.

Además, el análisis realizado en este modelo permitió conocer la necesidad de una agrupación de riesgos para la estimación de las tarifas, pues con las tarifas individuales obtenidas se pueden reconocer al menos tres grupos bien diferenciados que parecen estar caracterizados por parámetros diferentes.

Pero, aunque el Modelo de Bühlmann-Straub nos ayudó a descubrir aspectos muy importantes en este análisis, el asumir la homogeneidad entre los riesgos y en el tiempo lo hace un modelo poco útil para el objetivo planteado.

Continuando la búsqueda para determinar bajo qué modelo de credibilidad se logra obtener la tarifa de riesgo que mejor se adapte a las observaciones de la cartera, se aplican a las mismas el **Modelo de Regresión de Hachemeister**, motivados principalmente porque considera que las observaciones esperadas siguen una función de tipo lineal y además, las varianzas no son constantes sino que dependen de los pesos o ponderaciones naturales considerados. Esta aplicación se realiza con  $n = 2$ , mediante el cual se alcanza el objetivo propuesto para la mayoría de los riesgos, tarifas de credibilidad que no sólo utilicen la experiencia adquirida en el negocio, sino que además estimen tarifas suficientes.

Esta conclusión se logra al comparar de manera gráfica las tarifas empíricas históricas contra las ajustadas por credibilidad y determinar como estas

últimas mantienen la tendencia histórica observada, para la mayoría de los riesgos analizados. Se exceptúan de este logro los riesgos identificados con 8, 16 y 20, que precisamente no evidencian una tendencia lineal, para cuya solución se insta desarrollar investigaciones dirigidas a la utilización de matrices de diseño  $(Y_i)$  distintas.

Pese al logro de alcanzar nuestro objetivo, gracias a las propiedades que muestra el modelo de Hachemeister, no se debe olvidar que el mismo posee como deficiencia el asumir homogeneidad entre pólizas.

Este modelo, al igual que el de Modelo de Bühlmann-Straub, alerta sobre la necesidad de considerar una jeraquización de dos niveles en la cartera de estudio, pues se observa una marcada diferencia en los estimadores alcanzados para cada grupo de riesgo.

Finalmente, y sin dejar desatendida la advertencia que nos mostraron los modelos de Hachemeister y Bühlmann-Straub, respecto a la jeraquización de la cartera, se aplicó el **Modelo de Jewell**, mediante el cual podemos realizar un análisis de la cartera considerando subgrupos de afinidad.

Para entender mejor el efecto que tiene sobre el cálculo de las primas individuales el considerar un segundo parámetro de riesgo, se desarrolló el modelo bajo el supuesto de una conformación de cartera subdividida en 3 grupos, pero con sus componentes ordenados de manera distinta, generando 2 escenarios de análisis.

Los resultados obtenidos en ambos escenarios fueron tarifas empíricas prácticamente iguales a las de credibilidad, pero con fuertes diferencias en los fac-

tores de credibilidad, al menos en los últimos grupos de estudio, según la agrupación seleccionada, lo cual implica dar mayor o menor credibilidad a la tarifa individual respecto a la grupal, según el análisis seleccionado por subcarteras.

De esta manera, y observando las pequeñas diferencias entre los casos analizados al aplicar el Modelo de Jewell, y con base en el criterio de menor varianza, se determinó que el segundo escenario se adecuaba mejor a los datos observados. Sin embargo, el modelo de Jewell no considera tendencia, limitante por la cual en este caso también se descartaron los modelos de Bühlmann y Bühlmann-Straub.

Concluyendo, el modelo que mejor ajusta las tarifas de riesgo según la experiencia propia y la presentada en la cartera estudiada, es el modelo de Hachemeister, al considerar una tendencia lineal, para 17 de los 20 grupos de riesgo analizados y permitir con ello incorporar la tendencia de la experiencia individual en la proyección de la tarifa futura.

Para poder resolver el problema propuesto en todos los grupos de estudio, se considera importante investigar modelos jerárquicos de regresión, situación que no contempla el modelo de Jewell estudiado. Por lo tanto, este campo de investigación queda como un punto a investigar en un futuro.



---

## Bibliografía

- [1] Alfaro, A. (2011) *Análisis Doctrinario y Jurisprudencial de las Enfermedades Incapacitantes como Riesgo de Trabajo y los Posibles Efectos en la Suspensión del Contrato de Trabajo*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Costa Rica, San José.
- [2] Bühlmann, H. (1969) “Experience rating and credibility”, *ASTIN Bulletin*, **vol**(5): 157-165.
- [3] Bühlmann, H. and Gisler, A. (2005) *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [4] Bühlmann, H. (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.

- [5] Denuit, M.; Marechal, X.; Pitrebois, S. and Walhin, J-F. (2007) *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus System*, John Wiley and Sons, New York.
- [6] Fundación MAPFRE (2008) *Teoría de Credibilidad. Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros*. Madrid.
- [7] Garrido, J and Romera, R. (1995) “On credibility and robustness with the Kalman filter”, *Statistics and Econometrics Series* **vol**(07): 157-162.
- [8] Garrido, J. and Zhou, J. (2006) “Credibility theory for generalized linear and mixed models”, *Technical Report 5/06*, Concordia University, Montreal, Quebec.
- [9] Hachemeister, C. (1975) *Credibility for Regression Models with Application to Trend*. Academic Press, New York.
- [10] Hickman, J. (1975), *Introduction and Historical Overview of Credibility and Application*. Academic Press, New York.
- [11] Ibarra, J.A.; Aparicio Rozas, A. and Morobel J.A. (2008) “Las Bases Bayesianas de la Teoría de Credibilidad”, Departamento de Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid.
- [12] Instituto Nacional de Seguros (2008) “Norma Técnica: Seguro de Riesgos del Trabajo”, San José.
- [13] Klugman, S. and Panjer, H. (2008) *Loss Models: From Data to Decisions*, John Wiley and Sons, New York.



- 
- [14] *La Gaceta* (2010) San José, Costa Rica. N°182. Imprenta Nacional.
- [15] LongleyCook, L. (1962) “An introduction to credibility theory”, *Study kit of the Casualty Actuarial Society*. **vol** (49): 194-221.
- [16] Mowbray, A. (1914) “How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium?” *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* **vol**(1): 24-30.
- [17] Norberg, R. (1976) “A credibility theory for automobile bonus system”, *Scandinavian Actuarial Journal* **vol**(2): 92-107.
- [18] Norberg, R. (1982) “On optimal parameter estimation in credibility”, *Insurance: Mathematics and Economics* **vol**(1): 73-89.
- [19] Nugent, R. (1997) “La seguridad social, su historia y sus fuentes”. Instituto de Investigaciones Jurídicas, Oslo, Noruega.
- [20] Ross, S. (2003) *Introduction to Probability Models*. Academic Press, New York.
- [21] Taylor, G. (1974) “A review of credibility theory”. Preprint, School of Economic and Financial Studies, Macquarie University.
- [22] Vargas Chavarría, E. (2010) *Código de Trabajo. Ley No. 2 de 26 de agosto de 1943*. IJSA, 33ed San José, Costa Rica.
- [23] Ward, C. (1997) *Robust Theory Applied to Jewell’s Hierarchical Credibility Model*. Tesis de Maestría, Universidad de Concordia, Montreal, Quebec, Canadá.

- [24] Cadarso, M. and Febrero, E (2003) “Sistemas de reparto versus sistemas de capitalización”, *IX Jornadas de Economía Crítica*, Universidad de Castilla-La Mancha, Madrid: 321-356.
- [25] Whitney, A. (1918) “The theory of experience rating” *Proceedings of the Casualty Acturial Society* **vol**(4): 274-292.
- [26] Gómez, E. (2006) “On the use of the weighted balanced loss function to obtain credibility premiums”, *International Conference on Mathematical and Statistical Modeling in Honor of Enrique Catillo*, Universidad de Las Palmas, Gran Canaria: 56-68.
- [27] Barrantes, R. (1999) *Investigación un Camino al Conocimiento*. EUNED, San José.